بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

# تحول زمانی حساسیت فاز "محدودیت هایزنبرگی" در حضور کانال ناهمدوس تعدیل دامنه

فرزام نصرتی[۱] ، محمد علی جعفری زاده [۲]

پژوهشکده فیزیک کاربردی و ستاره شناسی، دانشگاه تبریز، تبریز[۱]

دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز[۲]

**چکیده – حالت N۰۰N به عنوان حالت درهمتنیده جهت افزایش دقت اندازه‌گیری فاز در تداخل سنج های کوانتومی پیشنهاد شد. در این مطالعه به تحولات زمانی حساسیت فاز "محدوده هایزنبرگی" با استفاده از نظریه تخمین کوانتومی در حضور عامل ناهمدوسی "تعدیل دامنه" می‌پردازیم. عامل ناهمدوس موجب می‌شود که اطلاعات حساسیت فاز به عنوان دقت اندازه گیری فاز در تداخل سنج‌های کوانتومی بطور کلی از دست برود. همچنین تحولات زمانی حساسیت فاز مربوط به عامل ناهمدوسی پروسه‌های مارکو و غیر مارکو بررسی می‌شود که موجب می شود چگونگی تبادل اطلاعات مربوط به فاز بین محیط و سیستم بررسی شود.**

کلید واژه- پروسه مارکو، حالت درهمتنیده N۰۰N ، حساسیت فاز، محدوده هایزنبرگی، تعدیل دامنه.

# Heisenberg Limit Phase Sensitivity Evolution in the presence of Amplitude Damping Decoherence Channel

Farzam Nosraty[۱], Mohammd Ali Jafarizadeh[۲]

[۱]Research Institute for Applied Physics and Astronomy, University of Tabriz, Tabriz

[۲]Department of Physics, University of Tabriz, Tabriz

Abstract- Recently entangled N۰۰N state was purposed to beat Heisenberg limit phase sensitivity. In the present study, time evolution of phase sensitivity of entangled N۰۰N state is determined by the aid of quantum estimation strategy in the presence amplitude damping decoherence channels. The phase sensitivity which is Heisenberg's limit in the initial state is lost after decay time by the effect of decoherence channel. Also, quantum fisher information assessed to comprehend the phase sensitivity evolution corresponding to Non-Markovian and Markovian process which shows by the phase information exchange between system and environment.

Keywords: Markovian process, Eentangled N۰۰N state, Phase sensitivity, Heisenberg limit, Amplitude damping.

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-01-30 ]



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

## ۱- مقدمه

مترولوژی یا نظریه تخمین کوانتومی با استفاده از اطلاعات قابل دستیابی و اندازه‌گیری، پارامترهای تصادفی را تخمین می‌زند. همچنین نظریه تخمین نه تنها روشی جهت تخمین پارامترهای فیزیکی است بلکه روشی جهت بیشینه کردن احتمال رخداد پارامتر است. افزایش دقت اندازه‌گیری در سیستم‌های کوانتومی از مهمترین اهداف نظریه تخمین کوانتومی است. دقت در اندازه‌گیری پارامترهای فیزیکی می‌تواند بصورت باند به عنوان دقت قابل دسترس، که عموماً بصورت نامساوی کرامر-رائو [۱] معرفی می‌شود [۲, ۳]. دیراک [۴] برای اولین بار رابطه عدم قطعیت بین تعداد فوتون (شدت نور) و فاز نور $\Delta n\Delta\varphi \geq 1$ $\Delta n\Delta\varphi \geq 1$ را معرفی کرد که این عدم قطعیت در اندازه‌گیری فاز در بیان تخمین کوانتومی باند کرامر-رائو است. باند کوانتومی برای منابع نور کلاسیکی همان بیان کلاسیکی استاندارد $\delta\varphi = 1/\sqrt{N}$ است. در چند سال اخیر منابع نور غیر کلاسیکی، "فوتون‌های درهمتننده"، برای افزایش دقت اندازگیری و رسیدن به "دقت هایزنبرگی" $\delta\varphi = 1/N$ $\delta\varphi = 1/N$ معرفی شده اند [۵, ۶].

از طرفی سیستم کوانتومی، همیشه در حال برهمکنش با محیط است که غالباً به عنوان نویز در سیستم اثر می‌کند بطوری که این برهمکنش‌ها غیر قابل اجتناب هستند. از قبیل این نویز می‌توان به ناقطبیده شدن نور، اتلاف انرژی به عنوان افول دامنه و فاز و غیره اشاره کرد. تحولات سیستم کوانتومی در حالت کلی به دو نوع کلی مارکو و غیره مارکو تقسیم می‌شود. تحولات مارکو را عموماً بدون حافظه( اطلاعات از سیستم به محیط سرازیر می شود) و تحولات غیره مارکو را تحولات حافظه دار به عنوان حافظه‌های کوانتومی می شناسند. نظریه تخمین همچنین روش سودمندی برای بیان تاثیرات برهمکنش محیط با سیستم در اندازه‌گیری و دقت آن خواهد بود [۷, ۸].

از این رو در این مقاله به بررسی تاثیرات تعدیل دامنه به عنوان کانال ناهمدوسی در حساسیت فاز به روش نظریه تخمین کوانتومی در حالت N۰۰N پرداخته شده است. همچنین با استفاده از این روش می‌توان نوع برهمکنش بین محیط و سیستم را تشخیص داد.

## ۲- مقدمات ریاضی نظریه تخمین کوانتومی

تخمین پارامتر ناشناخته تصادفی $\varphi$ که وابسته مستقیم به حالت کوانتومی دارد هدف نظریه تخمین است. این اندازه‌گیری غالباً توسط پایه‌های "عملگر مقدار مثبت اندازه‌گیری" (POVM) جهت یافتن آمار خروجی‌های سیستم انجام می‌شود. دقت اندازه‌گیری توسط باند قابل دسترس کرامر-رائو با M اندازه‌گیری مسقل از انتخاب اندازه-گیری محدود می‌شود که این عدم دقت یا خطا در اندازه‌گیری اطلاعات فیشر کوانتومی (QFI) به بیان زیر است.

$$\delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{MF}},\ F = Tr\left(L^2(\varphi;t)\rho(\varphi;t)\right) \quad (۱)$$

که M تعداد اندازه‌گیری و $L_\rho(\varphi)$ عملگر هرمیتی که توسط معادله "مشتق لگاریتمی متقارن" (SLD) تعریف می‌شود. معادله SLD [۲] به بیان زیر است.

(۲)

$$\partial_\varphi \rho(\varphi;t) = \frac{\rho(\varphi;t)L_\rho(\varphi;t) + L_\rho(\varphi;t)\rho(\varphi;t)}{2}$$

همچنین با استفاده از بسط ماتریس چگالی بر روی ویژه حالت‌ها:

$$\rho = \sum_k p_n(\varphi;t)\left|\psi_n(\varphi;t)\right\rangle\left\langle\psi_n(\varphi;t)\right| \quad (۳)$$

می‌توان عملگر SLD را برای هر حالت کوانتومی بصورت زیر تعریف کرد.

$$L_\rho(\varphi) = 2\sum_{n,m}\frac{\left\langle\psi_n\left|\partial_\varphi\rho\right|\psi_m\right\rangle}{p_m + p_n}\left|\psi_n\right\rangle\left\langle\psi_m\right| \quad (۴)$$

شایان ذکر است که باند فیشر کوانتومی مسقل از انتخاب اندازه‌گیری است. QFI مربوط به هر اندازه‌گیری بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$F^Q(\varphi) = \sum_x \frac{\mathrm{Re}\left(\mathrm{Tr}\left(\rho_\varphi L_\varphi E_x\right)\right)^2}{\mathrm{Tr}\left(\rho_\varphi E_x\right)} \quad (۵)$$

باند مربوط به هرگونه اندازه‌گیری بصورت زیر است.

$$\delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{MF^Q}} \geq \frac{1}{\sqrt{MF}} \quad (۶)$$

اگر اندازه‌گیری های انتخاب شده کمینه باشد آنگاه دقت به باند بالایی دسترسی می‌یابد [۲, ۳].

## ۳- بحث و نتایج

تحولات زمانی سیستم را می‌توان با استفاده از تحول تک کیوبیت عملگرهای که در شرایط رد ماتریس را ارضا می‌کنند، نوشت. این عملگرها را می‌توان بر اساس دسته عملگرهای پایه پاولی بیان کرد. تعدیل دامنه در حالت کلی در برهمکنش سیستم و محیط در دمای متناهی توسط عوامل فیزیکی مانند گسیل خود بخودی، از دست رفتن انرژی و غیره صورت می‌گیرد. عملگرهای تحول زمانی مربوط به تعدیل دامنه در حالت کلی به بیان زیر هستند.

$$\begin{aligned} A_t(I) &= I - \left((1-2g(t))(1-f(t))\right)\sigma_z \\ A_t(\sigma_z) &= f(t)\sigma_z \\ A_t(\sigma_x \pm \sigma_y) &= e^{i\varphi}\sqrt{f(t)}\left(\sigma_x \pm \sigma_y\right) \end{aligned} \quad (۷)$$

که پارامترهای $f(t) = e^{-\delta t}$ و $g(t) = e^{i\omega t}$ بیان می‌شوند. همچنین $\delta = \frac{1}{T}$ زمان (واهلش) تعدیل دامنه و $\omega$ یک عدد حقیقی که کوپلاژ تک مد محیط و سیستم هستند.

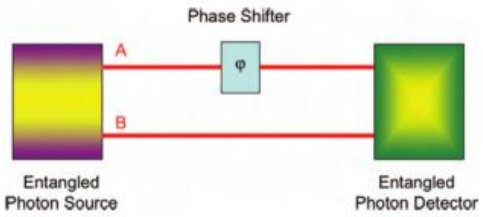
حالتی که به عنوان N۰۰N پیشنهاد شده بصورت:



[ Downloaded from opsi.ir on 2026-01-30 ]

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|N\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |N\rangle_B\right) \quad (۸)$$

با N فوتون درهمتنیده جهت تخمین پارامتر تصادفی فاز در مقالات معرفی شده است. تصور فیزیکی از سیستم کوانتومی دو ترازه این است که تمامی فوتون‌ها با احتمال برابر یا در شاخه پایین تداخل سنج یا در شاخه بالا هستند. شکل زیر نمایشگر چنین تداخل سنجی است.




شکل ۱: تداخل‌سنج کوانتومی

اگر کانال‌های نویزی به عنوان عملگرهای تحول زمانی بر روی حالت مورد نظر اثر کند در نهایت ماتریس چگالی توصیف کننده حالت سیستم بصورت زیر بیان می‌شوند.

(۹)

$$\rho(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \otimes_j^n \left(1_j + ((1-2g(t))(1-f(t)))\sigma_{z:j}\right)$$
$$+ \frac{1}{2^{n+1}} \otimes_j^n \left(1_j - ((1-2g(t))(1-f(t)))\sigma_{z:j}\right)$$
$$+ \frac{1}{2^{n+1}} \otimes_j^n (f(t))^{\frac{n}{2}} \left(\sigma_{x:j} + i\sigma_{y:j}\right)$$
$$+ \frac{1}{2^{n+1}} \otimes_j^n (f(t))^{\frac{n}{2}} \left(\sigma_{x:j} - i\sigma_{y:j}\right)$$

با استفاده از ویژه حالت‌ها و ویژه مقادیر در نهایت عملگر SLD برای هر زمان سیستم بصورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$L = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{in}{\lambda_1(t) + \lambda_n(t)}\right) *$$
$$*(\otimes_j^n (g(t))^n (\sigma_{x:j} - i\sigma_{y:j})$$
$$+ \otimes_j^n (g(t))^n (\sigma_{x:j} - i\sigma_{y:j})) \quad (۱۰)$$

حالت نخست به زمان اولیه (قبل از عمل کردن عوامل ناهمدوس) یا حالت خالص سیستم برداخته می‌شود. در این حالت عملگر SLD بصورت زیر بیان می‌شود.

$$L(\varphi) = Ni\,(e^{iN\varphi}0,N >< 0,N\,| -$$
$$e^{-iN\varphi}N,0 >< ,N,0|). \quad (۱۱)$$

در نتیجه باند بالایی اطلاعات فیشری بدون حضور عوامل ناهمدوس $F = N^2$ و درنهایت حساسیت فاز هایزنبرگی با M بار اندازه‌گیری بصورت زیر در سیستم‌های فوتونیکی قابل دسترس خواهد بود.

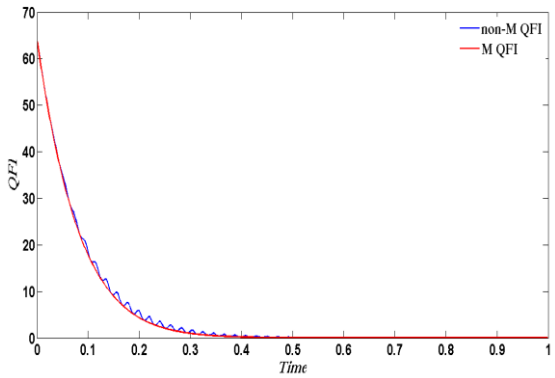
$$\delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{M}\,N^2} \quad (۱۲)$$

اگر در راستای عملگر SLD اندازه‌گیری انتخاب شود آنگاه عملگرهای POVM کمینه خواهند بود.

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{I}^{\otimes N} + \sigma_x^{\otimes N}\right)$$
$$E_2 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{I}^{\otimes N} - \sigma_x^{\otimes N}\right) \quad (۱۳)$$

آنگاه با استفاده از معادله حساسیت فاز هایزنبرگی بدست خواهد آمد.

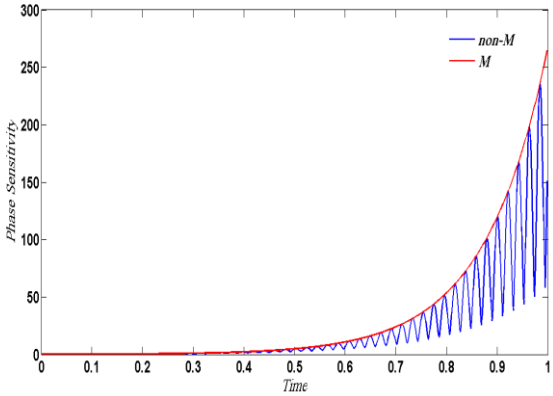
بعد اثر کانل‌های ناهمدوس تحول زمانی مقادیر اطلاعات فیشیری (**شکل ۲**) و حساسیت فاز (**شکل ۳**) برای دو حالت $\omega = 10$ (خط آبی) و $\omega = 0$ (خط چین قرمز) رسم شده است. تعدیل دامنه موجب می شود که بعد از مدتی اندازه‌گیری فاز ممکن نباشد. به عبارتی اطلاعات در مورد فاز سیستم نور بطور کلی از دست می‌رود. این یک نوع تعدیل حالت کوانتومی است که سرعت آن به پارامتر پدیده بستگی دارد. اصطلاحاً اطلاعات بدون بازگشت در حالت $\omega = 0$ از سیستم به محیط انتشار می‌یابد. اما در حالت بعدی تعدیل بصورت یکسان نیست چون به دلیل نوع برهمکنش سیستم و محیط نوسانات در زمان های مشخصی در دقت اندازه‌گیری وجود دارد. اصطلاحا در این زمان مشخص اطلاعات فاز از محیط به سیستم باز می گردد یا به عبارتی انشارات اطلاعات به عنوان حساسیت فاز یا دقت اندازه‌گیری فاز بین سیستم و محیط نوسان می‌کند و محیط دارای خاصیت حافظه‌ی کوانتومی است. اصطلاحاً به چنین پروسه ای غیر مارکو گفته می شود. به عنوان نتیجه نوع برهمکنش سیستم و محیط سبب تحولاتی مارکو و غیر مارکو در حساسیت فاز حالت N۰۰N می شود.




شکل ۲: تحولات زمانی اطلاعات فیشیری در حضور عامل ناهمدوسی تعدیل دامنه برای دو مقدار پارامتر $\omega = 0$ (خط قرمز) و $\omega = 10$ (خط آبی)



[ Downloaded from opsi.ir on 2026-01-30 ]




شکل ۳: تحولات زمانی حساسیت فاز در حضور عامل ناهمدوسی تعدیل دامنه برای دو مقدار پارامتر $\omega = 0$ (خط قرمز) و $\omega = 10$ (خط آبی)

## ۴- نتیجه‌گیری

تحولات حساسیت فاز حالت درهمتنیده N۰۰N در حضور عامل ناهندوسی تعدیل دامنه با استفاده از اطلاعات فیشری بررسی شد. به عنوان نتیجه نوع برهمکنش سیستم و محیط سبب تحولاتی مارکو و غیر مارکو در حساسیت فاز حالت N۰۰N می شود. که تبادل اطلاعات بین محیط و سیستم را در پی دارد.

## مراجع

[۱] H. Cramer, *Mathematical methods of statistics*, Harald Cramer, Princeton mathematical series ۱۹۴۶.

[۲] C.W. Helstrom, *Quantum detection and estimation theory*, Academic press New York, (۱۹۷۶).

[۳] M. Paris, J. Rehacek, *Quantum state estimation*, Springer, (۲۰۰۴).

[۴] P.A. Dirac, *The quantum theory of the emission and absorption of radiation*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, ۲۴۳, (۱۹۲۷).

[۵] K.P. Seshadreesan, S. Kim, J.P .Dowling, H. Lee, *Phase estimation at the quantum Cramér-Rao bound via parity detection*, **Physical Review A**, ۸۷, ۰۴۳۸۳۳ (۲۰۱۳).

[۶] G. Tóth, Multipartite entanglement and high-precision metrology**, Physical Review A**, ۸۵, ۰۲۲۳۲۲ (۲۰۱۲).

[۷] C. Addis, B. Bylicka, D. Chruściński, S. Maniscalco, *What we talk about when we talk about non-Markovianity*, arXiv preprint arXiv:۱۴۰۲,۴۹۷۵ (۲۰۱۴).

[۸] F. Petruccione, H.-P. Breuer, The theory of open quantum systems, Oxford Univ. Press, (۲۰۰۲)



[ Downloaded from opsi.ir on 2026-01-30 ]