بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

بازسازی توزیع فاز دو موج تداخل کننده با استفاده از معادله انتقال شدت و روش تغییر پله‌ای فاز

احمد درودی[۱]، جواد امیری[۲]،

[۱]گروه فیزیک، دانشگاه زنجان، زنجان

[۲]دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مراغه، مراغه

چکیده – در این مقاله از تعمیم معادله انتقال فاز و شدت به شدت تداخلی دو موج و روش تغییر فاز پله‌ای در بازسازی توزیع فاز دو موج تداخل کننده استفاده می‌شود. نتایج شبیه سازی و همچنین داده‌های تجربی ارائه شده نشان می‌دهند که با ثبت شدت تداخلی در چند موقعیت مکانی، می‌توان توزیع فاز هر دو موج تداخل کننده را به صورت همزمان به دست آورد.

کلید واژه- بازسازی فاز، روش انتقال فاز، معادله انتقال فاز و شدت.

Reconstruction of the phase distribution of the two interfering waves using the transport of intensity equation and phase-step method

Ahmad Darudi[۱], Javad Amiri[۲],

[۱]Physics Department, University of Zanjan, Zanjan, Iran

[۲]Islamic Azad University, Maragheh Branch, Maragheh, Iran

Abstract- In this paper the extension of the transport of intensity and phase equation to the intensity of the interference of two wave and phase step method are used for reconstructing of two wavefronts. The simulation results and the experimental data shows that by using the interference intensity recorded at several locations, both waves interfering phase distribution can be achieved simultaneously.

Keywords: phase reconstruction, transport of intensity equation, fringe analysis.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

بازسازی دو موج تداخل کننده از تحلیل میدان تداخلی در سه بعد اخیرا مورد توجه قرار گرفته است [۳-۱]. این روش برای بهبود خطای جبهه موج مرجع در روشهای تداخل‌سنجی مرسوم می‌تواند استفاده شود. در روشهای متداول تداخل سنجی (مانند تداخل سنج مایکلسون ، تویمن گرین، ماخ زنر، فیزو و ...)معمولا یک موج مرجع که با کیفیت خوبی تخت است با موج عبوری یا بازتابی از سطح مورد آزمون تداخل داده می‌شود و از تحلیل نوارهای تداخلی می‌توان اختلاف فاز بین دو موج را به دست آورد[۴]. سپس این اختلاف فاز به سطح مورد آزمون نسبت داده می‌شود. بنابراین در روشهای متداول ایجاد موج تخت با کیفیت مناسب الزامی است. اخیرا نویسندگان روشی نوین برای تحلیل نوارهای تداخلی ارائه داده‌اند[۳] که در آن از معادله انتفال شدت و روش متداول تغییر فاز استفاده شده و با شبیه سازی نشان داده شده است که می‌توان اثر دو موج را از هم تفکیک کرد. در این مقاله علاوه بر معرفی روش، نتایج تجربی آن نیز ارائه می‌شود.

۲- معرفی معادله انتقال شدت

معادله انتقال شدت (۱) از قسمت موهومی معادله انتشار هلمهولتز در فضای آزاد با استفاده از تقریب پیرا محوری قابل استخراج است[۵].

$$\nabla_{\perp}.(I\nabla_{\perp}\theta) = -k\frac{\partial I}{\partial z}. \qquad (۱)$$

آنچه اندازه گیری می‌شود گرادیان شدت روی صفحه مشاهده و مشتق شدت در امتداد z است. این معادله برای شدت تداخلی دو موج تداخل کننده نیز معتبر است[۳]. برای حل این معادله، روشهای متفاوتی پیشنهاد شده است و به علت غیر یکنواخت بودن شدت I در تداخل‌سنجی از روش ارائه شده در [۶] برای حل این معادله استفاده می‌شود. این روش نیاز به حافظه زیاد رایانه دارد لذا انتخاب اندازه ماتریس شدت را دارای محدودیت می‌کند. همانطور که در [۳] نشان داده شده معادله انتقال فاز و شدت قابل استفاده برای موج حاصل از برهمنهی امواج می‌باشد.

۳- کاربرد روش انتقال فاز و معادله انتقال‌شدت در بازسازی توزیع فاز دو موج تداخل کننده

شدت تداخلی دو موج به صورت رابطه(۲) تعریف می‌شود و فاز موج تداخلی نیز از رابطه (۳)بدست می‌آید[۴].

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad (۲)$$

$$\tan(\theta) = \frac{E_1\sin(\theta_1) + E_2\sin(\theta_2)}{E_1\cos(\theta_1) + E_2\cos(\theta_2)} \qquad (۳)$$

نکته‌ای که به آن دقت شود این است که فاز موج تداخلی θ و اختلاف فاز دو موج تداخلی $\theta_2 - \theta_1$ تعاریف متفاوتی دارند. در صورت اعمال تغییر فاز با مقدار ثابت δ_n به یکی از موجها این روابط به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$I' = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\theta_2 - \theta_1 + \delta_n)، \qquad (۴)$$

$$\tan(\theta_n') = \frac{E_1\sin(\theta_1 + \delta_n) + E_2\sin(\theta_2)}{E_1\cos(\theta_1 + \delta_n) + E_2\cos(\theta_2)}. \qquad (۵)$$

اگر برای δ_nاز چهار مقدار 0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π و $\frac{3\pi}{2}$ استفاده شود معادله (۵) به صورت دستگاه چهار معادله زیر می‌شود.

$$b + c = T_1 e + T_1 d، \qquad (۶)$$

$$b + e = T_2 e + T_2 c، \qquad (۷)$$

$$b - c = T_3 e + T_3 d، \qquad (۸)$$

$$b - e = T_4 e + T_4 c، \qquad (۹)$$

که د رآن :

$a = E_1 / E_2$ ، $b = a\sin(\theta_1)$ ، $c = \sin\theta_2$ ، $d = a\cos\theta_1$ ، $e = \cos\theta_2$ ، $T_1 = \tan(\theta_1')$ ، $T_2 = \tan(\theta_2')$ ، $T_3 = \tan(\theta_3')$ ، $T_4 = \tan(\theta_4')$.

با حل دستگاه چهار معادله چهار مجهول (۶-۹) فاز دو باریکه تداخل‌کننده به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{T_3 M_1 - T_1 + T_1 M_1 - 1}{2M_1 + T_2 - 1}\right)، \qquad (۱۰)$$

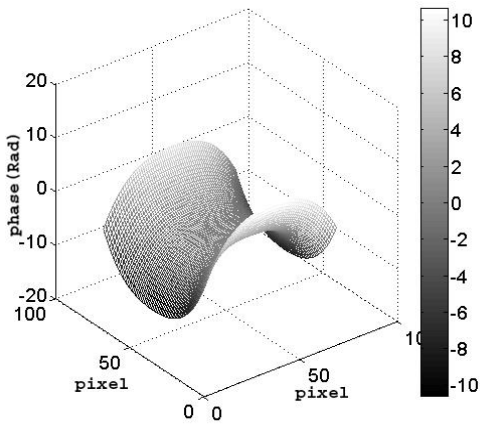
$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{T_1 + T_3 - [M_2(T_2 + T_4)]/\tan(\theta_2)}{2 - 2M_2/\tan(\theta_2)}\right)، \qquad (۱۱)$$

که در آنها $M_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_3}$ و $M_2 = \frac{T_1 - T_3}{T_4 - T_2}$ است.

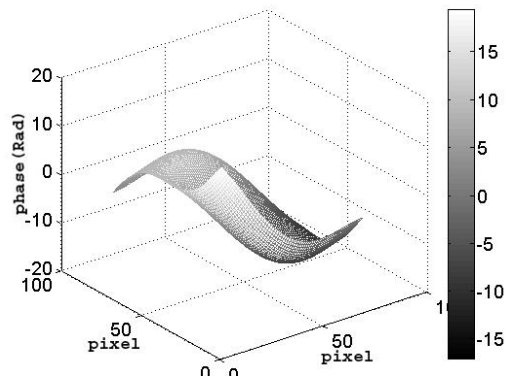
[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این شبیه سازی ابتدا دو تابع θ_1 و θ_2 با استفاده از جملات زرنیکه مطابق شکلهای (۱) و (۲) به عنوان فاز دو باریکه ایجاد شده‌اند برای هر دو باریکه شدت یکنواخت با اندازه متفاوت انتخاب شده و میدان هر باریکه به صورت $\vec{E} = E\exp(i\theta)$ نوشته می‌شود. در انتخاب شدت باریکه‌ها باید به این موضوع توجه کرد که نمایانی نوارهای تداخلی نباید یک باشد زیرا فاز موج تداخلی در نقاط دارای شدت صفر تکینه بوده و قابل محاسبه نیست. با جمع کردن میدان دو باریکه طرح تداخلی دو موج ایجاد می‌شود و شدت تداخلی در مبدا ثبت می‌شود که در شکل (۳) نمایش داده شده است، حال با استفاده از انتگرال فرنل کیرشهف دو میدان به اندازه $\pm dz$ به جلو و عقب انتشار داده شده و دوباره شدت طرح تداخلی ثبت می‌شود. با استفاده از معادله انتقال شدت فاز تداخلی بازسازی می‌شود.



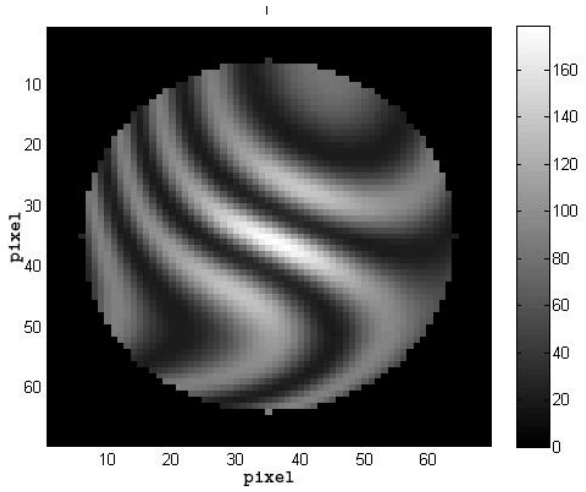
شکل ۱: فاز فرضی برای باریکه یک (θ_1).



شکل ۲: فاز فرضی برای باریکه ۲ (θ_2).

برای حل معادله انتقال شدت از روش ماتریسی [۶] استفاده شده است. مقدار خطای انحراف معیار بین ماتریس شبیه‌سازی شده فاز تداخلی و فاز بازسازی شده با روش ماتریسی برابر با ۰٫۰۴۸۷ رادیان می‌باشدکه معیاری برای دقت یا خطای روش حل معادله انتقال فاز و شدت برای موج تداخلی است.

با اعمال انتقال فازهای $\frac{\pi}{2}$ ، π و $\frac{3\pi}{2}$ بین دو موج تداخل کننده و حل معادله انتقال شدت و فاز مقادیر مربوط به θ_1'، θ_2'، θ_3' و θ_4' محاسبه می‌شوند و در روابط (۱۰) و (۱۱) جاگذاری شده و فاز موجهای تداخل‌کننده به دست می‌آید. میزان خطای انحراف معیار برای فازهای بازسازی شده به ترتیب ۰٫۰۵۸ و ۰٫۲۲ رادیان به دست آمد که نشان از دقت روش ارائه شده می‌باشد.

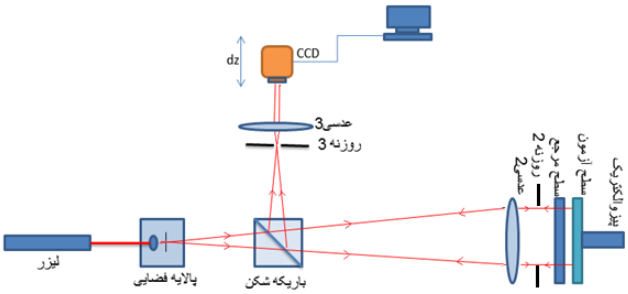


شکل ۳: طرح تداخلی مربوط به تداخل دو موج فرض شده.

۵- نتایج تجربی

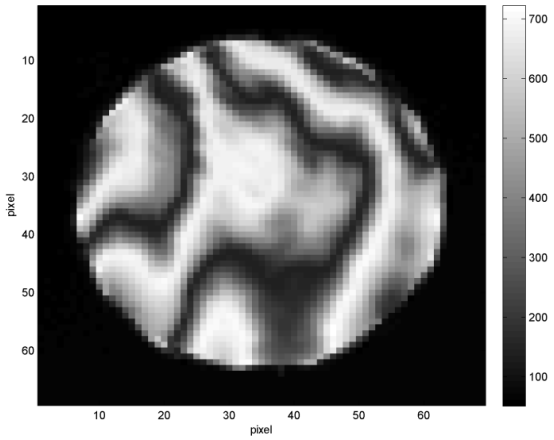
برای نشان دادن درستی روش ارائه شده از داده‌های تجربی استفاده شد. چیدمان آزمایش مطابق شکل (۴) تنظیم گردید و تداخل نگاشت حاصل از برهمنهی امواج بازتابی از سطح آزمون و سطح مرجع (با دقت $\lambda/10$) ثبت شده است که در شکل (۵) تداخل در z_0 و با مقدار انتقال فاز $\delta = 0$ نشان داده شده است. به علت محدودیت حافظه رم رایانه پس از ثبت توزیع شدت تداخلی برای کوچکتر شدن اندازه ماتریسها از روش میانگین‌گیری استفاده شده است به این ترتیب که به ازای هر ۳۶ پیکسل (۶×۶) از داده‌ها ماتریس ثبت شده مقدار میانگین آن جاگذاری شد.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]

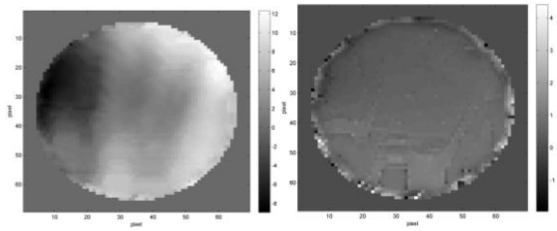


شکل ۴: چیدمان تجربی استفاده شده برای ثبت داده‌ها.

پس از ثبت داده‌ها ابتدا با حل معادله انتقال فاز و شدت مقادیر مربوط به θ'_1، θ'_2، θ'_3 و θ'_4 محاسبه شد و با کمک روابط (۱۰) و (۱۱) فاز باریکه‌ها به دست آمد شکل (۶) فازهای بازسازی شده را نمایش می‌دهد.

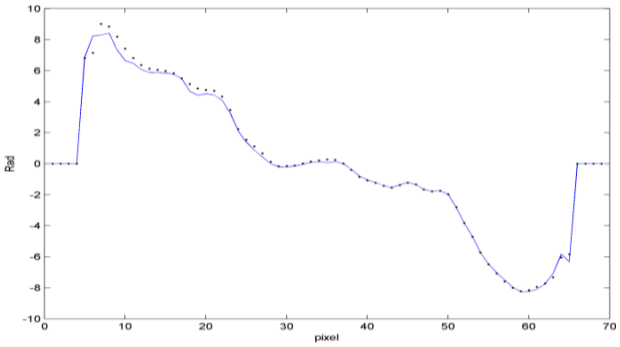


شکل ۵: طرح تداخلی ثبت شده از چیدمان شکل (۴).



شکل ۶: فاز بازسازی شده برای باریکه اول (سمت راست) و باریکه دوم (سمت چپ) بر حسب رادیان.

از روش انتقال فاز مرسوم مقایسه و مقدار انحراف معیار بین آنها ۰٫۵۹ به دست آمده است، سطر ۳۰ آنها در شکل (۸) نشان داد شده است.



شکل ۸: نمودار خط‌چین نشان دهنده سطر ۳۰ مربوط به اختلاف دو فاز بازسازی شده (اختلاف شکلهای ۶ و ۷) و نمودار توپر اختلاف فاز دو باریکه که با روش انتقال فاز به دست آمده است. محور افقی شماره پیکسلها و محور عمودی بر حسب رادیان می‌باشد.

برای نشان دادن درستی جوابها ابتدا اختلاف فاز دو موج بازسازی شده محاسبه شده و با اختلاف فاز به دست آمده همانطور که نتایج به دست آمده نشان می‌دهد روش ارائه شده هم در شبیه‌سازی و هم در داده‌های تجربی با دقت نسبتا خوبی فاز هر دو باریکه تداخلی را بازسازی می‌نماید. البته هنوز مطالعه جهت افزایش دقت تحلیل دادها ادامه دارد. از منابع خطای این روش می‌توان به دقت اندازه گیری مشتق شدت در امتداد z و حل معادله انتقال شدت اشاره کرد. با ادامه کار بر روی این روش و افزایش دقت آن می‌توان خطای موج مرجع در آزمون تداخل‌سنجی را به حداقل رساند.

مراجع

[۱] Akhlaghi, E., Darudi, A., Tavassoly, T., *Reconstructing the phase distribution of two interfering wavefronts by analysis of their nonlocalized fringes with an iterative methods*, **Optics Express**, ۱۷(۲۰۱۱) ۱۵۹۷۶-۱۵۹۸۱.

[۲] درودی، احمد، یزدانی، رقیه، *بازسازی توزیع فاز دو موج با حل معادله انتقال شدت در دو بعد*، کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران،۱۳۸۷.

[۳] Amiri, J., Darudi, A., Khademi, S., Soltani, P., *Application of Transport-of-intensity equation in fringe analysis*, **Optics Letters**, ۱۰(۲۰۱۴) ۲۸۶۴-۲۸۶۷.

[۴] Malacara, D., *Optical shop testing*, ۳th edition, A John wiley and sons Inc. publication, ۲۰۰۷.

[۵] M.R. Teague, *Deterministic phase retrieval: a Green's function solution*, **J. Opt. Soc. Am.** ۷۳(۱۹۸۳) ۱۴۳۴–۱۴۴۱.

[۶] Gureyev, T.E., Nugent, K.A., *Phase retrieval with the transport of intensity equation-Orthogonal series solution for non-uniform illumination*, **J. Opt. Soc. Am. A**, ۱۳ (۱۹۹۶) ۱۶۷۰-۱۶۸۲.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]