بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

تولید حالات همدوس درهم تنیده ی دو مده بوسیله شکافنده باریکه

قادر نجارباشی، سودا میرزائی

اردبیل- دانشگاه محقق اردبیلی، دانشکده فیزیک

چکیده – حالت همدوس (یا به اصطلاح حالت گلوبر) به نوع خاصی از حالتهای خالص مکانیک کوانتومی میدان نوری متناظر با یک مد تشدیدی مربوط می شود که نزدیکترین حالت کوانتومی به موج سینوسی کلاسیکی، نظیر یک موج لیزر پیوسته است. در این مقاله با استفاده از شکافنده باریکه و محیط کر حالات همدوس درهم تنیده دو مده تولید کرده و مقدار درهم تنیدگی را با استفاده از سنجه تلاقی محاسبه می کنیم و نشان می دهیم که با عبور باریکه لیزری از یک شکافنده باریکه و محیط کر تولید حالتی با بیشینه درهم تنیدگی امکانپذیراست.

کلید واژه- حالت همدوس، درهم تنیدگی، شکافنده باریکه، تلاقی

Generating two-modes entangled coherent states using beam splitter

Ghader Najarbashi, Sevda Mirzaei

Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, 179, Iran

Abstract- Coherent state (also called Glauber state) refer to a special kind of pure quantum-mechanical state of the light field corresponding to a single resonator mode which describe closest quantum state to a classical sinusoidal wave such as a continuous laser wave. In this paper we manipulate entangled two mode coherent states using beam splitter (BS) and Kerr medium and then evaluate the amount of entanglement by concurrence measure. We show that it is possible to construct maximal entangled state by transmitting a laser beam from a BS and Kerr medium.

Keywords: Coherent state, Entanglement, Beam splitter, Concurrence

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

درهم تنیدگی

درهم تنیدگی کوانتومی یکی از مشخصه های سیستم های مرکب است که شامل دو یا بیشتر جزء می باشد که در مقابل آن مفهوم جداپذیری قرار دارد [۱]. یک حالت درهم تنیده ترکیبی است از برهم نهشت کوانتومی با ضرب تانسوری. هرگاه یک حالت خالص $|\psi\rangle$ مربوط به یک سیستم دوجزئی را بتوان بصورت ضرب تانسوری دو زیر سیستم بصورت زیر نوشت

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 . \qquad (۱)$$

حالت سیستم جداپذیر و در غیر اینصورت درهم تنیده است. تعریف مشابهی برای حالات آمیخته نیز وجود دارد. یکی از سنجه های مناسب برای اندازه گیری در هم تنیدگی، تلاقی می باشد. این سنجه اولین بار توسط ووترز[۳و۲] برای حالات خالص و آمیخته دو جزئی مطرح شد و بدنبال آن برای سیستم های چند جزئی نیز تعمیم داده شد. برای یک حالت خالص دو کیوبیتی(اسپین $\frac{1}{2}$) به شکل زیر

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle, \qquad (۲)$$

تلاقی عبارتست از

$$C = 2|ad - bc|. \qquad (۳)$$

تلاقی برای حالات دو کیوبیتی با بیشینه درهم تنیدگی، یک و برای حالات جداپذیر صفر است.

تولید حالات همدوس درهم تنیده دو مده

یک حالت همدوس ویژه حالت عملگر نابودیست که در رابطه زیر صدق می کند

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \qquad (۴)$$

بطوریکه α یک عدد مختلط و $\hat{a}$ عملگر نابودیست. این ویژه حالات را می توان بر حسب پایه های شمارنده بصورت زیر بسط داد

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \qquad (۵)$$

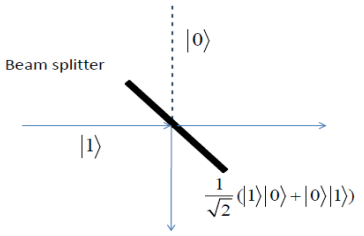
$|0\rangle$حالت خلا و $\hat{D}(\alpha)$ عملگر جابجایی است که بصورت زیر تعریف می شود

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\,\hat{a}^\dagger - \alpha^*\,\hat{a}). \qquad (۶)$$

حاصلضرب دو حالت همدوس نیز عبارتست از

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^*\beta)}, \qquad (۷)$$

که مقداری غیر صفر است یعنی دو حالت همدوس متعامد نیستند. برای تولید حالتهای همدوس درهم تنیده یکی از ابزارهای اپتیکی بنام شکافنده باریکه را معرفی می کنیم. شکافنده از دو بلور دو شکستی بهم چسبیده نظیر کلسیت و کوارتز، تشکیل شده است که خاصیت شکافتن باریکه ی نور به دو قطبش خطی عمود بر هم را دارد. نوع دیگر شکافنده باریکه یک آینه نیم نقره اندود متشکل از یک پوشش نیمه بازتابنده و یک پوشش ضد بازتابنده در طرف دیگر است. وقتی تک فوتون از شکافنده عبور می کند حالت خروجی یک حالت درهم تنیده خواهد بود که در شکل (۱) نشان داده شده است[۵و۴].



شکل ۱: تولید حالت درهم تنیده از برخورد تک فوتون به شکافنده

عملگر یکانی متناظر با این وسیله عبارتست از

$$\hat{B} = e^{\frac{\pi}{4}(\hat{a}^\dagger\hat{b} - \hat{b}^\dagger\hat{a})}, \qquad (۸)$$

عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ و همینطور $\hat{b}$ و $\hat{b}^\dagger$ عملگرهای تولید و نابودی هستند که تحت اثر شکافنده باریکه بصورت زیر تبدیل می شوند

$$\hat{a}' = \hat{B}\hat{a}\hat{B}^\dagger,\ \hat{b}' = \hat{B}\hat{b}\hat{B}^\dagger, \qquad (۹)$$

با استفاده از رابطه بیکر-هوسدورف

$$e^{\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-\lambda\hat{A}} = \hat{B} + \lambda[\hat{A},\hat{B}] + \frac{\lambda^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \ldots, \qquad (۱۰)$$

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]

مدهای جدید a' و b' بصورت زیر بدست می آید

$$\hat{a}' = \frac{\hat{a}-\hat{b}}{\sqrt{2}},\ \hat{b}' = \frac{\hat{a}+\hat{b}}{\sqrt{2}}. \qquad (۱۱)$$

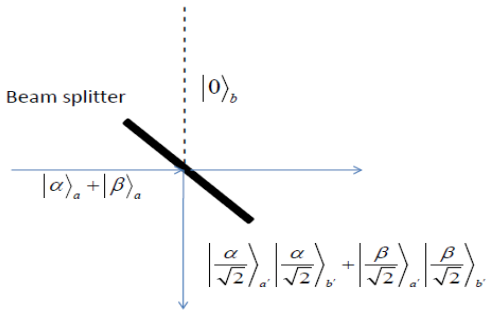
اثر شکافنده روی باریکه لیزری عبارتست از

$$\hat{B}|\alpha\rangle_a|0\rangle_b = \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{a'}\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{b'}, \qquad (۱۲)$$

که در واقع شکافنده پرتوی لیزر را به دو قسمت مساوی در دو درگاه تبدیل کرد. حال با این مقدمه می خواهیم یک حالت همدوس درهم تنیده دو مده تولید کنیم. اگر باریکه ورودی به درگاه a، یک حالت برهم نهشتی از حالات همدوس به شکل $|\alpha\rangle+|\beta\rangle$ در مد a و ورودی درگاه b حالت خلا در مد b باشد مطابق شکل (۲) خواهیم داشت

$$\hat{B}(|\alpha\rangle_a+|\beta\rangle_a)|0\rangle_b = \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{a'}\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{b'} + \left|\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right\rangle_{a'}\left|\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right\rangle_{b'}. \qquad (۱۳)$$

همانطور که نشان خواهیم داد حالت بدست آمده یک حالت همدوس درهم تنیده دو مده است.



شکل ۲: تولید حالت همدوس درهم تنیده دو مده با استفاده از شکافنده باریکه

برای تولید حالت خاصی از این حالت همدوس درهم تنیده از محیط کر غیر خطی استفاده می کنیم که با عملگر یکانی زیر توصیف می شود

$$\hat{K} = e^{\frac{-i\pi(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2}{2}}, \qquad (۱۴)$$

اثر محیط کر روی حالت همدوس عبارتست از

$$\hat{K}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle+i|-\alpha\rangle). \qquad (۱۵)$$

حالت منتجه شبیه حالت گربه شرودینگر است. می توان با قرار دادن یک شکافنده باریکه ۵۰-۵۰ در مقابل چنین حالتی یک حالت همدوس درهم تنیده تولید کرد بطوریکه داریم

$$\hat{B}(|\alpha\rangle_a-|-\alpha\rangle_a)|0\rangle_b = \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{a'}\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{b'} - \left|-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{a'}\left|-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{b'}). \qquad (۱۶)$$

حالت فوق یک حالت همدوس درهم تنیده دو مده است. برای اینکه درهم تنیدگی حالات بدست آمده فوق را بدست آوریم از این حقیقت که حالات همدوس $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ مستقل خطی هستند و یک زیرفضای هیلبرت دوبعدی را جاروب می کند استفاده خواهیم نمود. پایه های متعامد $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ چنین تعریف می شوند[۶و۷]

$$|0\rangle = |\alpha\rangle,\ |1\rangle = \frac{|\beta\rangle - p_1|\alpha\rangle}{N_1}, \qquad (۱۷)$$

بطوریکه $p_1 = \langle\alpha|\beta\rangle$ و $N_1^2 = 1-p_1^2$.

حالات تولید شده در روابط (۱۳) و (۱۶) حالات خاصی از رابطه زیر هستند

$$|\psi\rangle = \frac{1}{N}(|\alpha\rangle|\alpha\rangle + \mu|\beta\rangle|\beta\rangle), \qquad (۱۸)$$

که در این رابطه N ضریب بهنجارش است بطوریکه $N^2 = 1+\mu^2+2\mu p_1^2$. بطور کلی α و β و μ اعداد مختلط هستند که برای سادگی فرض می کنیم حقیقی اند. با جایگذاری رابطه ی (۱۷) در رابطه (۱۸) یک حالت دو کیوبیتی به شکل زیر بدست می آید

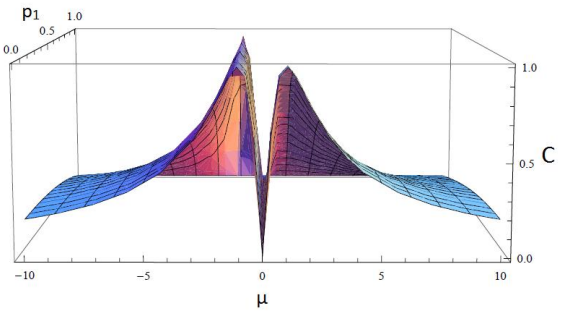
$$|\psi\rangle = \frac{1}{N}[(1+\mu p_1^2)|00\rangle + \mu\, p_1 N_1(|01\rangle+|10\rangle) + \mu\, N_1^2|11\rangle], \qquad (۱۹)$$

از رابطه ی (۳) تلاقی بصورت زیر بدست می آید

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]

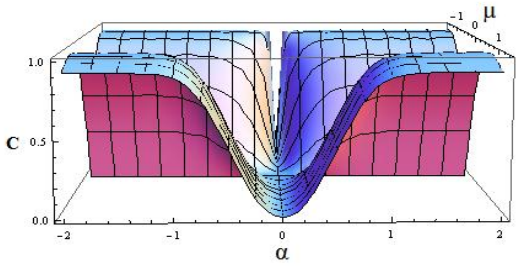
$$C=\frac{2\left|\mu(1-p_1^{\,2})\right|}{\left|1+\mu^2+2\mu p_1^{\,2}\right|}. \qquad (۲۰)$$

نمودار تلاقی بصورت تابعی از μ و p_1 در شکل (۳) رسم شده است.



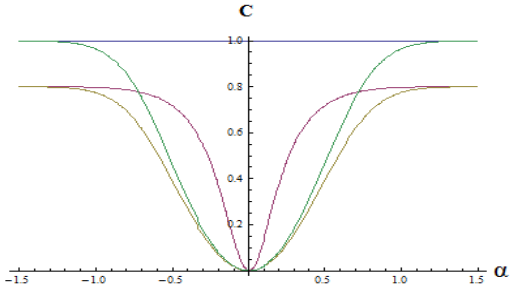
شکل ۳: نمودار تلاقی بر حسب μ و p_1

برای حالت کلی یعنی رابطه (۱۸) از نمودار دیده می شود که به ازای μهای مثبت و منفی رفتار تلاقی نامتقارن است. همچنین فقط وقتی $\mu=0$ باشد حالت جداپذیر است. نتیجه دیگر اینست که وقتی $\mu=-1$ باشد حالت همدوس درهم تنیده دو مده مستقل از مقادیر α و β ، یک حالت با بیشینه درهم تنیدگی یعنی $C=1$ است. بعلاوه اینکه به ازای $\mu=1$ تنها بشرطی که p_1 صفر باشد حالت همدوس درهم تنیده، بیشینه ی درهم تنیدگی را خواهد داشت. مشابه با روند قبلی برای حالت خاصی که در آن $\beta=-\alpha$ است رفتار سنجه تلاقی بر حسب αو μ بصورت شکل (۴) می باشد.



شکل ۴: نمودار تلاقی بر حسب μ و α

از شکل (۴) بازهم رفتار نامتقارن تلاقی برای مقادیر مثبت و منفی μ دیده می شود. برای درک بیشتر، نمودار دو بعدی C بر حسب α به ازای چند مقدار مختلف μدر شکل (۵) رسم شده است. حالت $\mu=-1$ بیشترین درهم تنیدگی را دارد. منحنی سبز به ازای $\mu=1$ رسم شده که نشان می دهد با افزایش مقدار α ، تلاقی افزایش یافته و در نهایت به مقدار بیشنه می رسد که با نتایج حالت قبل سازگاری دارد.



شکل ۵: نمودار تلاقی بر حسب α. خط آبی به ازای $\mu=-1$، منحنی سبز به ازای $\mu=1$ و دو منحنی زرد و بنفش بترتیب برای مقادیر $\mu=0.5$ و $\mu=-0.5$

از دو منحنی زرد و بنفش نیز ملاحظه می شود که بازای این مقادیر μ درهم تنیدگی هیچوقت به بیشینه مقدار نمی رسند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک طرح تجربی برای تولید حالت همدوس درهم تنیده دو مده با استفاده از شکافنده باریکه ارائه دادیم و درهم تنیدگی چنین حالتی را با استفاده از سنجه تلاقی محاسبه نمودیم و دیدیم که تنها نقطه جداپذیر ممکن بازای $\mu=0$ می باشد و زمانیکه $\mu=-1$ باشد حالت همدوس درهم تنیده بیشترین مقدار درهم تنیدگی را خواهد داشت و هرگاه $\mu=1$ تنها بشرطی که p_1 صفر باشد یعنی حاصلضرب دو حالت همدوس صفر باشد یا α مقادیر بزرگی اختیار کند حالت همدوس درهم تنیده بیشینه ی درهم تنیدگی را دارد.

مراجع

[1] A. Einstein, B. Podolski and N. Rosen, Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?, **Phys. Rev.** 47, 777-780 (1935).

[2] W. K. Wootters, Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits, **Phys. Rev. Lett.** 80, 2245 (1998).

[3] W. K. Wootters, Entanglement of formation and concurrence, **Quantum Information and Computation**, Vol. 1, No. 1 (2001).

[4] Jun O. S. Yin, S. J. van Enk, Entanglement and purity of one- and two-photon states, **Phys. Rev. A** 77, 062333 (2008).

[5] B. C. Sanders, Entangled coherent states, **Phys. Rev. A,** VOLUME 45, NUMBER 9.

[6] G. Najarbashi, Y. Maleki, Maximal Entanglement of Two-Qubit States Constructed by Linearly Independent Coherent States **Int J. Theor. Phys**(2011).

[7] X. Wang, Bipartite entangled non-orthogonal states, **J. Phys. A, Math. Gen.** 35, 165173 (2002).

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]