بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

حالت‌های چلانده غیرخطی درهم‌تنیده و ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها

امیر کریمی[۱،۲]؛ محمد کاظم توسلی[۱،۳]

[۱] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد ، یزد
[۲] گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، آباده، فارس
[۳]گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده – در این مقاله، پس از مروری کوتاه بر حالت‌های چلانده خطی و نیز نوع غیرخطی آن که اخیراً ارائه شده‌اند، به معرفی رده‌ای خاص از حالت‌های چلانده غیرخطی درهم‌تنیده پیوسته می‌پردازیم. در ادامه با محاسبه کمیت تلاقی به مطالعه مشخصه درهم‌تنیدگی این حالت‌ها پرداخته و درنهایت برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها با مطالعه پارامتر مندل، تابع همبستگی مرتبه دوم و اثر چلاندگی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

کلید واژه: درهم تنیدگی، حالت های چلانده غیرخطی درهم‌تنیده، حالت‌های غیرکلاسیکی.

Entangled Nonlinear Squeezed States and Their Nonclassical Properties

A. Karimi[(1),(2)]; M. K. Tavassoly[(1),(3)]

[(1)] Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, University of Yazd, Yazd
[(2)] Department of Physics, Islamic Azad University of Abadeh, Fars
[(3)] Photonic & Research Group, Engineering Research Center, University of Yazd, Yazd

Abstract- In this paper, after a brief review on the linear and nonlinear squeezed states, which are recently presented we introduce a new kind of the continuous variable entangled nonlinear squeezed states. In the continuation, we study the entanglement characteristics of these states via the calculation of concurrence and finally, some of their nonclassical properties will be evaluated by studying the Mandel parameter, correlation function and squeezing effect.

Keywords: Entanglement, Entangled nonlinear squeezed states, Nonclassical states.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-31]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱. مقدمه

دست‌یابی به حالت‌های جدید نور با ویژگی‌های غیرکلاسیکی به یکی از موضوعات مهم در اپتیک کوانتومی و نظریه اطلاعات کوانتومی تبدیل شده است. در این میان، چلاندگی به عنوان یکی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی نور، توجه بسیاری را به خود جلب کرده و توسط بسیاری از محققان مورد بررسی قرار گرفته است[۱]. حالت میدان تابشی را چلانده می‌نامیم، اگر تغییرات یکی از کوادراتورهای میدان نسبت به حالت همدوس، کاهش و دیگری افزایش یابد، البته به گونه‌ای که تغییرات هر دو کوادراتور میدان در رابطه عدم‌قطعیت هایزنبرگ صدق کند[۳،۲]. به عنوان برخی از کاربردهای این حالت‌ها می‌توان به ارتباطات با نوفه کم[۴]، اندازه-گیری‌های دقیق[۵] و آشکارسازی امواج گرانشی[۶] اشاره کرد. حالت‌های چلانده خطی زوج و فرد از کنش عملگر چلاندگی $S(\xi)=\exp[1/2(\xi^* a^2-\xi a^{\dagger 2})]$ روی حالت خلاء میدان به شکل زیر به دست می‌آیند[۳]:

$$|\xi\rangle_+ = N_+(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!}e^{in\theta}(\tanh r)^n|2n\rangle \qquad (۱)$$

$$|\xi\rangle_- = N_-(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n n!}{\sqrt{(2n+1)!}}e^{in\theta}(\tanh r)^n|2n+1\rangle \qquad (۲)$$

که در آن $N_+(\xi)$ و $N_-(\xi)$ ضرایب بهنجارش و $\xi=re^{i\theta}$ $(r\in\mathbb{R})$ هستند. اخیراً توسط یکی از نویسندگان مقاله، با تعمیم روشی که هم ارز کنش $|\xi\rangle=S(\xi)|0\rangle$ در حوزه عملگرهای خطی است، حالت-های چلانده غیرخطی زوج و فرد با جایگزینی عملگرهای نابودی a و آفرینش $a^\dagger$ توسط عملگرهای متناظر غیرخطی $A=af(n)$ و $A^\dagger=f(n)a^\dagger$ و تأثیر آن روی حالت خلاء میدان به شکل زیر به‌دست آمده‌اند[۷]:

$$|\xi,f\rangle_+ = N_{f,+}(\xi,f)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{in\theta}(\tanh r)^n \times\frac{[f(2n-1)]!!}{[f(2n)]!!}\frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!}|2n\rangle \qquad (۳)$$

$$|\xi,f\rangle_- = N_{f,-}(\xi,f)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{in\theta}(\tanh r)^n \times\frac{[f(2n)]!!}{[f(2n+1)]!!}\frac{2^n n!}{\sqrt{(2n+1)!}}|2n+1\rangle \qquad (۴)$$

که ضرایب بهنجارش به‌ترتیب از روابط زیر به‌دست می-آیند:

$$N_{f,+}^{-2}(\xi,f)=\sum_{n=0}^{\infty}(\tanh r)^{2n}\left(\frac{[f(2n-1)]!!}{[f(2n)]!!}\right)^2\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2} \qquad (۵)$$

$$N_{f,-}^{-2}(\xi,f)=\sum_{n=0}^{\infty}(\tanh r)^{2n}\left(\frac{[f(2n)]!!}{[f(2n+1)]!!}\right)^2\frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!} \qquad (۶)$$

در اینجا، عبارت‌های $[f(2n)]!!$ و $[f(2n+1)]!!$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$[f(2n)]!!=2^n n!\,f(2)f(4)\cdots f(2n) \qquad (۷)$$

$$[f(2n+1)]!!=f(2n+1)f(2n-1)f(2n-3)\cdots f(1) \qquad (۸)$$

۲. حالت‌های چلانده غیرخطی درهم‌تنیده و بررسی میزان درهم‌تنیدگی آنها

حالت‌های چلانده غیرخطی درهم‌تنیده دومدی زوج و فرد را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$|\Psi(\xi,f)\rangle_{ENSS_\pm}=N_{ENSS_\pm}(\xi,f) \times(|\xi,f\rangle_{\pm,a}|-\xi,f\rangle_{\pm,b}\pm|-\xi,f\rangle_{\pm,a}|\xi,f\rangle_{\pm,b}) \qquad (۹)$$

که علامت‌های بالایی (+) و پایینی (-) به‌ترتیب به حالت-های چلانده غیرخطی زوج (۳) و فرد (۴) و اندیس‌های a و b به دو مد میدان اشاره دارد و ضرایب $N_{ENSS_\pm}$ از شرط بهنجارش به‌دست می‌آیند. با درنظرگرفتن توابع غیرخطی مختلف $f(n)$، حالت‌های چلانده غیرخطی درهم‌تنیده متنوعی به‌وجود می‌آیند. در این مقاله با انتخاب تابع پنسون- سولومون $f_q(n)=q^{1-n}$، $0<q<1$ [۸]، به بررسی حالت‌های متناظر به ازای مقادیر مختلف q می‌پردازیم. قابل ذکر است که با قراردادن $f(n)=1$، این حالت‌ها به حالت‌های چلانده (خطی) درهم‌تنیده کاهش می‌یابد.

به منظور بررسی میزان درهم‌تنیدگی این حالت‌ها، ضریب "تلاقی"را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به طور کلی ضریب تلاقی برای حالت‌های کوانتومی درهم تنیده دومدی به صورت:

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{N}[\mu|\eta\rangle\otimes|\gamma\rangle+\nu|\xi\rangle\otimes|\delta\rangle] \qquad (۱۰)$$

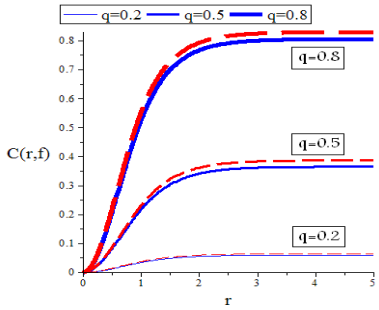
به شکل زیر تعریف می‌شود[۹]:

$$C=\frac{2|\mu||\nu|}{N^2}\sqrt{(1-|P_1|^2)(1-|P_2|^2)} \qquad (۱۱)$$
$$P_1=\langle\eta|\xi\rangle,\qquad P_2=\langle\delta|\gamma\rangle$$

که $|\eta\rangle$ و $|\xi\rangle$ حالت‌های بهنجار زیرسامانه ۱ و $|\gamma\rangle$ و $|\delta\rangle$ حالت‌های بهنجار زیرسامانه ۲ هستند. این معیار برای حالت‌هایی با بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی برابر یک است. حال با مقایسه روابط (۹) و (۱۰) با یکدیگر و استفاده از رابطه (۱۱) ضریب تلاقی حالت‌های چلانده غیرخطی زوج

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-31]

و فرد درهم‌تنیده را به‌دست آورده و برحسب r رسم می‌کنیم. همان‌طور که در شکل۱ مشاهده می‌کنیم در هر دو مورد حالت‌های چلاتده غیرخطی زوج و فرد درهم‌تنیده، میزان درهم‌تنیدگی از صفر شروع شده و با افزایش r برای مقدار q ثابت و با افزایش q در r ثابت، مقدار درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد و به سمت مقداری ثابت میل می‌کند. علاوه بر این، حالت چلاتده غیرخطی فرد درهم‌تنیده از میزان درهم‌تنیدگی بیشتری نسبت به حالت مشابه زوج به ازای q یکسان برخوردار است.



شکل۱- ضریب تلاقی حالت‌های چلاتده غیر خطی (زوج : پیوسته، فرد : خط‌چین) درهم‌تنیده به ازای مقادیر مختلف q.

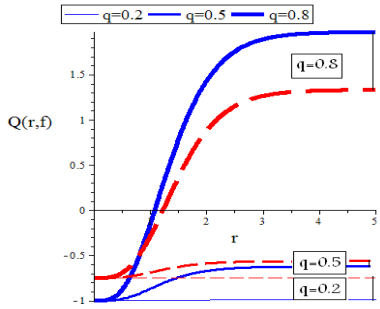
۳. ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های چلاتده غیرخطی درهم‌تنیده

۱.۳.آمار زیرپواسونی

به منظور مطالعه ویژگی‌های آماری هر حالت کوانتومی پارامترهای گوناگونی معرفی شده است. به عنوان رایج‌ترین این پارامترها، می‌توان به پارامتر مندل Q اشاره کرد که به شکل زیر تعریف می‌شود[۱۰]:

$$Q=\frac{\langle a^{\dagger 2}a^{2}\rangle-\langle a^{\dagger}a\rangle^{2}}{\langle a^{\dagger}a\rangle} \qquad (۱۲)$$

$Q>0$ ($Q<0$) بیان‌گر آمار فراپواسونی (زیرپواسونی) است. آمار زیرپواسونی یکی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های کوانتومی است. قابل ذکر است که تمامی مقادیر چشم‌داشتی لازم در این قسمت، نسبت به حالت‌های چلاتده غیرخطی زوج و فرد درهم‌تنیده (۹) محاسبه می‌شوند. با بررسی شکل۲ مشاهده می‌کنیم که در هر دو مورد حالت‌های چلاتده غیرخطی زوج و فرد درهم‌تنیده، با افزایش r برای q ثابت و همچنین با افزایش q در r ثابت ویژگی زیرپواسونی این حالت‌ها کاهش می‌یابد.



شکل۲- پارامتر مندل حالت‌های چلاتده غیر خطی (زوج : پیوسته، فرد : خط‌چین) درهم‌تنیده به ازای مقادیر مختلف q.

همچنین این حالت‌ها به‌ازای مقادیر q کوچک روی کل ناحیه میدان دارای ویژگی زیرپواسونی هستند که با افزایش q از پهنای آن ناحیه از میدان که دارای ویژگی زیرپواسونی است، کاسته می‌شود و به نواحی کوچک r محدود می‌شود. علاوه بر آن، حالت چلاتده غیرخطی زوج درهم‌تنیده به ازای مقادیرq کوچک، از ویژگی زیرپواسونی بیشتری نسبت به حالت مشابه فرد به ازای r یکسان برخوردار بوده و با افزایش q ، ویژگی زیرپواسونی هر دو حالت (به جزء در نواحی r کوچک) تقریباً یکی شده و ویژگی زیرپواسونی حالت چلاتده غیرخطی فرد درهم‌تنیده به ازای مقادیر q بزرگ، در ناحیه‌ای بسیار کوچکی از حالت مشابه زوج آن پیشی می‌گیرد.

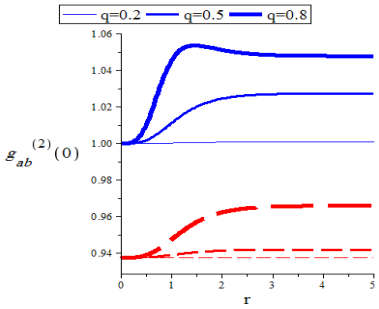
۲.۳.هم‌بستگی مدها

در این قسمت، میزان هم‌بستگی دو مد حالت‌های چلاتده غیرخطی زوج و فرد درهم‌تنیده (۹) را با محاسبه تابع هم‌بستگی مرتبه دوم که به شکل زیر تعریف می‌شود[۱۱] مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

$$g_{ab}^{(2)}(0)=\frac{\langle a^{\dagger}ab^{\dagger}b\rangle}{\langle a^{\dagger}a\rangle\langle b^{\dagger}b\rangle} \qquad (۱۳)$$

چنانچه $g_{ab}^{(2)}(0)<1$ باشد، حالت‌های چلاتده غیرخطی زوج و فرد درهم‌تنیده را غیرکلاسیکی و دو مد متناظر با آنها را ناهم‌بسته می‌گوییم. در شکل۳، تنها برای حالت‌های چلاتده غیرخطی فرد درهم‌تنیده به ازای تمامی مقادیر r و q، $g_{ab}^{(2)}(0)<1$ هستند. بنابراین، رفتار غیرکلاسیکی تنها در این حالت‌ها (فرد)، ظاهر شده و بین دو مد آنها ناهم‌بستگی وجود دارد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-31]



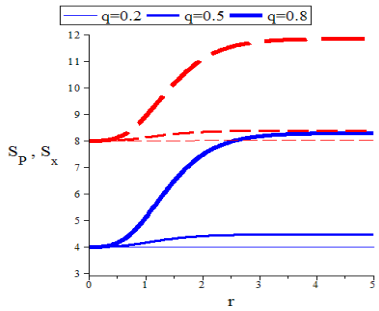
شکل۳- ضریب همبستگی مرتبه دوم حالت‌های چلانده غیرخطی (زوج : پیوسته، فرد : خط‌چین) درهم‌تنیده به ازای مقادیر مختلف q.

۳.۳.چلاندگی

با معرفی دو عملگر هرمیتی $x=(a+a^{\dagger})/\sqrt{2}$ و $p=(a-a^{\dagger})/\sqrt{2}i$ با رابطه جابجایی $[x,p]=i$، پارامترهای چلاندگی s_p, s_x به شکل $s_{x_j}=2(\Delta x_j)^2-1$ ($x_j=x,p$)، تعریف می‌شوند. این پارامترها را می‌توان به شکل زیر نیز بازنویسی کرد:

$$s_{x(p)}=2\langle a^{\dagger}a\rangle\pm\langle a^2\rangle\pm\langle a^{\dagger 2}\rangle\mp\langle a\rangle^2\mp\langle a^{\dagger}\rangle^2\mp 2\langle a\rangle\langle a^{\dagger}\rangle \quad (۱۴)$$

یک حالت کوانتومی را در x_j چلانده می‌گوییم، چنانچه برای آن حالت نامساوی $-1<s_{x_j}<0$ برقرار باشد.



شکل۴- پارامترهای چلاندگی حالت‌های چلانده غیرخطی (زوج : پیوسته، فرد : خط‌چین) درهم‌تنیده به ازای مقادیر مختلف q.

با رسم پارامترهای چلاندگی s_p, s_x برحسب r در شکل۴ هیچ‌گونه چلاندگی در هیچ‌یک از پارامترهای x و p مشاهده نمی‌شود. قابل ذکر است که در شکل۴، به ازای هر مقدار q، منحنی‌های s_p, s_x حالت‌ها، بر روی هم منطبق شده است.

۴. نتیجه‌گیری

دراین مقاله پس از مروری کوتاه بر حالت‌های چلانده خطی و نیز غیرخطی که اخیراً معرفی شده‌اند، با توجه به حضور تابع غیرخطی $f(n)$ رده‌ی وسیعی از حالت‌های چلانده غیرخطی درهم‌تنیده را معرفی کردیم. به عنوان نمونه‌ای ویژه از تابع پنسون-سولومون $f_q(n)=q^{1-n}$ در محاسبات استفاده کردیم. با ارزیابی کمیت تلاقی نشان دادیم که در هر دو مورد حالت‌های چلانده غیرخطی زوج و فرد درهم‌تنیده، با افزایش r در q ثابت و با افزایش qدر r ثابت، مقدار درهم‌تنیدگی از صفر شروع شده، افزایش یافته و درنهایت به مقدار ثابتی می‌رسد. علاوه بر آن، حالت چلانده غیرخطی فرد درهم‌تنیده از میزان در-هم‌تنیدگی بیشتری نسبت به حالت مشابه زوج به ازای q یکسان برخوردار است. پس از مطالعه برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی مانند: آمار زیرپواسونی، تابع همبستگی مرتبه دوم و چلاندگی، دیدیم که رفتار غیرکلاسیکی در دو ویژگی همبستگی مدها تنها در حالت‌های چلانده غیرخطی فرد درهم‌تنیده و در آمار کوانتومی در هر دو حالت زوج و فرد، آمار زیرپواسونی ظاهر می‌شود. ویژگی زیرپواسونی هر دو حالت چلانده غیرخطی زوج و فرد درهم‌تنیده، با افزایش r برای مقدار q ثابت و با افزایش q در r ثابت، کاهش یافته و از پهنای ناحیه‌ای از میدان که دارای ویژگی زیرپواسونی است، نیز با افزایش q کاسته-شده و به ناحیه r های کوچک محدود می‌شود. علاوه بر آن، حالت چلانده غیرخطی فرد درهم‌تنیده از ویژگی زیرپواسونی بیشتری نسبت به حالت مشابه زوج به ازای q یکسان برخوردار است.

مراجع

[1] Hu X, Nori F 1996 Phys. Rev. B **53** 2419.

[2] Scully M O and Zubairy M S, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[3] Gerry C and Knight P, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[4] Caves C M, 1981 Phys. Rev. D **23** 1693.

[5] Xiao M, Wu L A and Kimble H J, 1987 Phys. Rev. Lett. **59** 278.

[6] Walls D 1983 Nature. **306** 141.

[7] Noormandipour A and Tavassoly M K 2014 Commun. Theor.Phys. **61** 521.

[8] Penson K and Solomon A 1999 J. Math. Phys. **40** 2354.

[9] Kuang L M and Zhou L 2003 Phys. Rev. A **68** 043606.

[10] Mandel L 1979 Opt. Lett. **4** 205.

[11] Paul H 1982 Rev. Mod. Phys. **54** 1061.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-31]