بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

حل تحلیلی معادله موج در یک شنل نامرئی ساز خارجی با تابع تبدیل خطی

محمدرضا فروزش فرد، محمود حسینی فرزاد

بخش فیزیک دانشگاه شیراز، شیراز ۷۱۴۵۴، ایران

چکیده – مساله شنل نامرئی ساز خارجی در سال ۲۰۰۹ به روش اپتیک تبدیل مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته و ویژگی های دی الکتریکی آن استخراج شده است. در این مقاله ویژگی های دی الکتریکی گزارش شده توسط این پژوهش را مورد استفاده قرار داده و معادله موج ماکسول در محیطی با چنین ویژگی های دی الکتریکی را به صورت نظری حل کرده ایم. در نهایت با توجه به جواب های به دست آمده از حل معادله موج، شکل توزیع میدان در نواحی مختلف فضا را توسط نرم افزار متمتیکا رسم کرده و با نتایج حاصل از نرم افزار کامسول که در پژوهش سال ۲۰۰۹ گزارش شده است، مقایسه کرده ایم.

کلید واژه- اپتیک تبدیل، حل تحلیلی، شنل نامرئی ساز خارجی، معادله موج ماکسول

Theoretical solution of wave equation in an external invisibility cloak with linear transformation function

M. R. Forouzeshfard, M. Hosseini Farzad,

Physics Department, Faculty of Science, Shiraz University, Shiraz 71454, Iran

Abstract- In 2009 the problem of external invisibility cloak was solved for the first time by the method of transformation optics and the properties of the external invisibility cloak was obtained with that. In this paper the material properties of an external invisibility cloak which is obtained by transformation optics, is used to solve Maxwell's wave equations theoretically inside and outside of this cloak. At the end according to the result of our theoretical solution, electric field distribution is plotted with Mathematica software and the resulting diagram is compared with the other diagram which was plotted with COMSOL software and reported in literature.

Keywords: External invisibility cloak, Maxwell' wave equation, Theoretical solution, Transformation optics

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-03]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

بررسی نحوه انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط های شامل فرا مواد نوری در حال حاضر یکی از جذاب ترین و پرکاربردترین مباحث در علم اپتیک و فوتونیک می باشد. در بین این فرا مواد نوری، شنل های نامرئی ساز به دلیل ساختار ناهمسانگرد و همچنین عملکرد منحصر به فردشان توجه بیشتری را به سمت خود جلب کرده‌اند.

امکان ایجاد شنل های نامرئی ساز و بررسی ویژگی های آن‌ها اولین بار در سال ۲۰۰۶ [۱و۲] به کمک نظریه اپتیک تبدیل مورد بررسی قرار گرفت. این نوع از شنل نامرئی ساز تحت عنوان شنل نامرئی ساز حفره دار موسوم است. انواع مختلفی از شنل های حفره دار با هندسه های مختلف شامل بیضی [۳] مربع [۴] و استوانه [۵] در دو بعد و کره [۱] و چنبره [۶] در سه بعد در مقالات گزارش شده اند.

علاوه بر شنل های حفره دار، شنل های خارجی یا شنل در فاصله نیز که از مواد با ضریب شکست منفی و هندسه تاکننده بهره می گیرد در مقالات معرفی شده اند[۷].

تمامی بررسی های فوق و استخراج ویژگی‌های این ابزارها توسط نظریه اپتیک تبدیل انجام شده اند؛ برای اثبات صحت این ویژگی ها و همچنین یافتن نحوه انتشار امواج الکترومغناطیسی در این ابزارها حل نظری معادله موج ماکسول در چنین محیط هایی نیز مورد توجه قرار گرفته است. برای مثال می‌توان به حل نظری معادله موج در شنل های حفره دار استوانه ای [۸و۹] و کروی [۱۰] اشاره کرد.

در این مقاله قصد داریم حل نظری انتشار امواج الکترومغناطیسی در شنل های خارجی استوانه ای را مورد مطالعه قرار دهیم. برای این منظور ویژگی های دی الکتریکی استخراج شده توسط نظریه اپتیک تبدیل برای این نوع از شنل [۷] را مورد استفاده قرار داده و سعی می‌کنیم معادله موج در محیطی با این ویژگی ها را حل کنیم و جواب های آن را مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم. بعد از یافتن جواب های معادله موج، این جواب‌ها را برای تمامی نواحی موجود در مساله به کمک نرم افزار متمتیکا رسم کرده‌ایم.

۲- نظریه اپتیک تبدیل

تابع تبدیلی خطی به صورت زیر در دستگاه مختصات استوانه ای بین مختصه شعاعی فضای فیزیکی (مختصه بدون پریم) و به مختصه شعاعی فضای مجازی (مختصه پریم دار) در نظر بگیرید

$$r = f(r') = Ar'+B, \qquad \theta = \theta', \qquad z = z', \quad (۱)$$

که در آن A و B برای پوسته و هسته ابزار در یک شنل نامرئی ساز خارجی به ترتیب برابر است با[۷]

$$A_{shell} = \left(\frac{a-b}{c-b}\right), \qquad B_{shell} = b\left(\frac{c-a}{c-b}\right)$$
$$A_{core} = a/c, \qquad B_{core} = 0. \qquad (۲)$$

این تابع تبدیل طوری است که در آن $f(c) = a$ و $f(b) = b$ است. این تابع تبدیل لایه از فضا که در فاصله $b \le r' \le c$ قرار دارد را روی لایه دیگر $a \le r' \le b$ تا می کند. نظریه اپتیک تبدیل ویژگی های دی الکتریکی این شنل نامرئی‌ساز با تابع تبدیل فوق را به صورت زیر به دست می‌دهد [۷]

$$\varepsilon_r = \mu_r = \frac{r-B}{r}, \qquad \varepsilon_\theta = \mu_\theta = \frac{r}{r-B},$$
$$\varepsilon_z = \mu_z = \frac{r-B}{A^2 r} \qquad (۳)$$

که برای هریک از پوسته و هسته ابزار، لازم است از رابطه (۲) در رابطه (۳) جایگذاری کنیم.

۳- حل معادله موج ماکسول

معادلات ماکسول برای محیطی با ویژگی تانسور دی الکتریک قطری و برای مد TE (میدان الکتریکی در جهت محور استوانه z) معادلات دیفرانسیل زیر را به دست می دهد [۸]:

$$\frac{1}{\varepsilon_z r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\mu_\theta}\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{\varepsilon_z r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta}\right) + k_0^2 E_z = 0 \qquad (۴)$$

بعد از جداسازی متغیرها به صورت $E_z = \psi(r)\Theta(\theta)$ و همچنین جایگذاری رابطه (۳) در معادله (۴) معادله های دیفرانسیل زیر برای پوسته و هسته ابزار با قرار دادن

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-03]

A و B مربوطه به دست می‌آید:

معادله دیفرانسیل شعاعی

$$(r-B)^2\frac{d^2\psi(r)}{dr^2}+(r-B)\frac{d\psi(r)}{dr}+\left[\left(\frac{k_0}{A}(r-B)\right)^2-l^2\right]\psi(r)=0 \qquad (۵)$$

معادله دیفرانسیل زاویه ای

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+l^2\Theta(\theta)=0 \qquad (۶)$$

بخش شعاعی معادله دیفرانسیل، همان معادله دیفرانسیل بسل می‌باشد که مکان صفر های آن به اندازه B جابجا شده‌اند و جواب های بخش زاویه به صورت $e^{\pm il\theta}$ خواهند بود. بنابراین جواب های معادله موج در سه ناحیه $r>b$ $a<r<b$ و $r<a$ به صورت زیر خواهد بود

$$E_z=\begin{cases}\sum_l \alpha_l^{in}J_l(k_0r)e^{il\theta}+\alpha_l^{sc}H_l^{(1)}(k_0r)e^{il\theta} & r\ge b\\ \sum_l \alpha_l^{1}J_l\left(k_1(r-B_{shell})\right)e^{il\theta} & \\ \qquad +\alpha_l^{2}H_l^{(1)}\left(k_1(r-B_{shell})\right)e^{il\theta} & a\le r\le b\\ \sum_l \alpha_l^{3}J_l\left(k_2r\right)e^{il\theta} & r\le a\end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن $k_1=k_0\dfrac{c-b}{a-b}$، $k_2=k_0c/a$ و $J_l(.)$ و $H_l(.)$ به ترتیب توابع بسل و هنکل مرتبه اول می باشند؛ و α_l^i ($i=1,2,3,in,sc$)، ضرایب بسط برای موج در سه ناحیه مورد نظر می باشند.

شرایط مرزی مناسب روی E_z و H_θ معادلات زیر را به دست می دهند:

در $r=b$ داریم

$$\alpha_l^{in}J_l(k_0b)+\alpha_l^{sc}H_l(k_0b)=\alpha_l^1J_l\left(k_1(b-B)\right)+\alpha_l^2H_l\left(k_1(b-B)\right)$$
$$k_0\left[\alpha_l^{in}J_l'(k_0b)+\alpha_l^{sc}H_l(k_0b)\right]=\frac{k_1(b-B)}{b}\left[\alpha_l^1J_l\left(k_1(b-B)\right)+\alpha_l^2H_l\left(k_1(b-B)\right)\right]$$

(۸-الف)

و در $r=a$

$$\alpha_l^3J_l(k_2a)=\alpha_l^1J_l\left(k_1(a-B)\right)+\alpha_l^2H_l\left(k_1(a-B)\right)$$
$$k_2\alpha_l^3J_l'(k_2a)=\frac{k_1(a-B)}{a}\left[\alpha_l^1J_l\left(k_1(a-B)\right)+\alpha_l^2H_l\left(k_1(a-B)\right)\right]$$

(۸-ب)

که در آن B مربوط به پوسته است و برای خلاصه نویسی اندیس آن حذف شده است (B برای هسته ابزار برابر صفر است).

بعد از انجام جایگذاری های لازم و کمی محاسبه، معادلات (۸-الف) و (۸-ب) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_l^{in}-\alpha_l^1\right)J_l(k_0b)+\left(\alpha_l^{sc}-\alpha_l^2\right)H_l(k_0b)=0\\&\left(\alpha_l^{in}-\alpha_l^1\right)J_l'(k_0b)+\left(\alpha_l^{sc}-\alpha_l^2\right)H_l'(k_0b)=0\\&\left(\alpha_l^{3}-\alpha_l^1\right)J_l(k_0c)-\alpha_l^2H_l(k_0c)=0\\&\left(\alpha_l^{3}-\alpha_l^1\right)J_l'(k_0c)-\alpha_l^2H_l'(k_0c)=0\end{aligned} \qquad (۹)$$

با توجه به اینکه انتخاب b و c اختیاری است و همچنین این روابط برای تمام lها معتبر است لذا می-توان نتیجه گرفت

$$\alpha_l^1=\alpha_l^3=\alpha_l^{in},\qquad \alpha_l^{sc}=\alpha_l^2=0. \qquad (۱۰)$$

نکته ی قابل ذکر در اینجا این است که نتایج فوق بدون در نظر گرفتن شکل خاصی برای موج فرودی به دست آمده‌اند و کاملا کلی هستند. در ادامه برای رسم میدان به کمک نرم افزار، نیاز داریم که شکل موج فرودی را معلوم در نظر بگیریم. لذا یک موج تخت را برای این منظور انتخاب می کنیم.

۴- شبیه سازی عددی

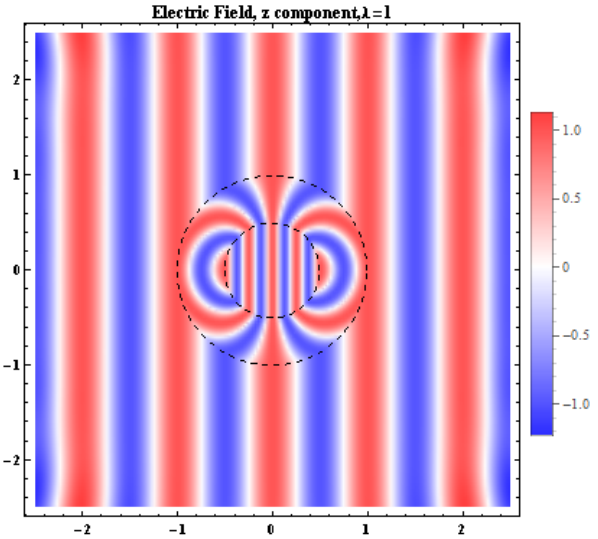
در ادامه با توجه به نتایج به دست آمده از بخش قبل، به کمک نرم افزار Mathematica تلاش کرده ایم تا نحوه‌ی تغییرات میدان در هر سه ناحیه از فضا را ترسیم کنیم و نتایج حاصل را با نتایج حاصل از نرم افزار COMSOL که سایر مقالات گزارش شده‌اند مقایسه کنیم.

برای این منظور ابتدا فرض می کنیم موج فرودی یک موج تخت تکفام TE باشد که از سمت چپ تحت زاویه فرودی صفر به ساختار شنل خارجی فوق فرود می‌آید؛

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-03]

بنابراین $\alpha_l^{in} = (-i)^l$ خواهد بود[۸].

شکل ۱ مؤلفه z میدان الکتریکی یک موج تخت تکفام با طول موج $\lambda = 1$ واحد را در هر سه ناحیه به هنگام عبور از شنل خارجی برای $-20 \le l \le 20$ را نشان می دهد. پارامترهایی که برای رسم این نمودار مورد استفاده قرار گرفته‌اند عبارتست از $a = 0.5, b = 1, c = 2$ که کاملا مشابه پارامترهای مرجع [۷] است و شکل حاصل انطباق بسیار خوبی با شکل گزارش شده در این مرجع، که توسط نرم افزار کامسول ترسیم شده است؛ دارد.



شکل۱-توزیع میدان الکتریکی در تمامی نواحی داخلی، میانی و خارجی از یک شنل خارجی که تحت تابش یک موج تخت تکفام TE با طول موج $\lambda = 1$ واحد قرار گرفته است. و توسط نرم افزار متمتیکا رسم شده است.

۵- نتیجه گیری

حل نظری معادله موج ماکسول برای یک شنل نامرئی ساز خارجی مورد بررسی قرار گرفته است. بعد از یافتن معادله دیفرانسیل و حل آن، با توجه به شرایط مرزی مناسب، جواب های معادله موج را برای تمامی نواحی مساله به دست آورده ایم. در پایان به کمک نرم افزار متمتیکا میدان الکتریکی را برای تمامی این نواحی ترسیم کرده و با شکل ترسیمی گزارش شده با نرم افزار کامسول که در مرجع [۷] گزارش شده است، مقایسه کرده ایم. نتایج حاصل توافق بسیار خوبی با نتایج گزارش شده در مرجع مورد نظر دارند.

مراجع

[1] J. B. Pendry, D. Schuring and D. R. Smith, *Controlling electromagnetic fields*, **Science**, 312, 1780 (2006).

[2] U. Leonhardt, *Optical conformal mapping*, **Science** 312, 1777 (2006).

[3] Hualiang Zhang, Hao Xin, and R. W. Ziolkowski, *Electromagnetic Invisibility Cloak with Circular-Elliptical Shaped Boundary*, **Antennas and Propagation Society International Symposium, 2009. APSURSI '09. IEEE**

[4] Marco Rahm, David Schurig, Daniel A. Roberts, Steven A. Cummer, David R. Smith, John B. Pendry, *Design of electromagnetic cloaks and concentratorsusing form invariant coordinate transformation of maxwel's equations*, **Photonics and Nanostructures–Fundamentals and Applications 6 (2008) 87–95**

[5] Cai Wenshan., Shalaev Vladimir., *Optical Metamaterials Fundamentals and applications*, New York, Springer, 2010.

[6] Yu You, George W. Kattawar, and Ping Yang, *Invisibility cloaks for toroids*, **Opt Express**, 2009 Apr;17(8):6591-9

[7] Lai Y., Chen H.Y., Zhang Z. Q., Chan C. T., *Complementary media invisibility cloak that cloaks objects at a distance outside the cloaking shell*, **Phys. Rev. Lett**. 102, 093901, 2009.

[8] Zhichao Ruan, Min Yan, Curtis W. Neff, and Min Qiu, *Ideal Cylindrical Cloak, Perfect but sensitive to Tiny Perturbation*, **Phys. Rev. Lett.** 99, 113903 (2007).

[9] Baile Zhang, Hongsheng Chen, Bae-Ian Wu, Yu Luo, Lixin Ran, and Jin Au Kong, *Response of a cylindrical invisibility cloak to electromagnetic waves*, **Phys. Rev.** B, 76, 121101(R), (2007).

[10] Hongsheng Chen, Bae-Ian Wu, Baile Zhang, and Jin Au Kong, *Electromagnetic Wave Interactions with a Metamaterial Cloak*, **Phys. Rev. Lett.** 99, 063903 (2007).

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-03]