بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

بررسی فرمیون دو بعدی بدون جرم در پتانسیل شیمیایی محدود به روش دینامیکی میدان گرمایی (ترموفیلد)

مرجان جعفری

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره) قزوین، قزوین

چکیده – در این مقاله یک سامانه فرمیونی دو بعدی بدون جرم با پتانسیل شیمیایی غیر صفر و در دمای متناهی متغیر با زمان را با استفاده از روش میدان گرمایی مورد بررسی قرار می‌دهیم و تابع برهمکنش دو نقطه‌ای را برای سامانه محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تابع دو نقطه‌ی برای سامانه با پتانسیل شیمیایی به صورت حاصلضرب تابع دو نقطه‌ی برای سامانه با پتانسیل شیمیایی صفر در قسمت فازی وابسته به پتانسیل شیمیایی می‌باشد.

کلید واژه- پتانسیل شیمیایی، تابع برهمکنش دو نقطه‌ی، فرمیون، میدان گرمایی.

Two-dimensional free massless Fermi theory at finite chemical potential in the Thermo-field Dynamics approach

Marjan Jafari

Imam Khomeini International University of Ghazvin, Ghazvin.

Abstract- A free massless fermion field at finite chemical potential and time varying temperature are considered and in thermo-field dynamics the expectation value of 2n-point functions as the thermodynamic average are computed. It was observed that the Fermi fields under consideration, was able to factorize the chemical potential dependence of the two-point functions in to an exponential pre-factor.

Keywords: Chemical potential, Fermions, Thermo-field, Two-point function,

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

فرمول‌بندی‌های فراوانی برای نظریه میدان در دمای متناهی وجود دارد که روش میدان گرمایی از جمله آن‌ها می‌باشد. روش میدان گرمایی بر پایه کار با عملگرها می‌باشد و از تبدیلات مشابه تبدیلات بوگولوبیوف در این روش استفاده می‌شود که توسط امزاوا و تاکاهاشی پیشنهاد شده است[۱-۲]. مهمترین ویژگی‌ی این روش یکی عملگری بودن آن است و دیگر اینکه تمام ویژگی‌های نظریه میدان دمای صفر را حفظ می‌کند. در دیدگاه میدان گرمایی در نظریه میدان های کوانتومی لازم است که درجات آزادی میدان‌ها دو برابر شود. این مساله با معرفی یک فضای آینه‌ای که با علامت مد نشان داده می‌شود امکان‌پذیر می‌باشد و برای هر عملگر در فضای حقیقی یک عملگر در فضای آینه‌ای وجود خواهد داشت و یک فضای هیلبرت دوگان تشکیل خواهد شد. فضای آینه‌ی یک کپی از فضای اصلی تحت مطالعه می‌باشد که روابط کانونیک برای آن نیز برقرار است. مفهوم اصلی روش میدان گرمایی در این نکته است که حالت گرمایی در فضای اولیه معادل یک حالت خلا در فضای هیلبرت گسترش یافته می‌باشد و با استفاده از آن متوسط گرمایی متغیرهای دینامیکی به‌راحتی محاسبه می‌شود. روش میدان گرمایی به‌صورت گسترده در مسائل کوانتوم اپتیک و ماده چگال بکار می‌رود [۳-4].

روش میدان گرمایی برای سامانه‌های کوانتومی در حالت تعادل گرمایی و عدم تعادل گرمایی به‌کار می‌رود. هنگامی که سیستم در تعادل پایدار نباشد برای مثال هنگامی که دمای محیط با زمان تغییر می‌کند و یا هنگامی که سامانه‌های با دماهای متفاوت داشته باشیم می‌توان از روش میدان گرمایی استفاده نمود [5].

در این مقاله سامانه فرمیونی دو بعدی بدون جرم با پتانسیل شیمیایی غیر صفر را در نظر می‌گیریم که دمای سامانه با زمان به کندی تغییر می‌کند و فرض می‌شود که تحول سامانه بی‌دررو باشد و سامانه در هر لحظه در تعادل گرمایی باشد و از توزیع بولتزمن پیروی کند و برای این سامانه تابع برهمکنش دونقطه‌ی را محاسبه می‌کنیم.

۲- روش کار

در این کار ابتدا سامانه فرمیونی دو بعدی بدون جرمی را در دمای صفر و پتانسیل شیمیایی صفر در نظر می‌گیریم

$$\psi^{(0)}(x)=\begin{pmatrix}\psi^{(0)}(x^+)\\ \psi^{(0)}(x^-)\end{pmatrix},\quad \tilde{\psi}^{(0)}(x)=\begin{pmatrix}\tilde{\psi}^{(0)}(x^+)\\ \tilde{\psi}^{(0)}(x^-)\end{pmatrix} \qquad (۱)$$

که $x^{\pm}=x^0\pm x^1$ و دینامیک فضای هیلبرت دوگان با لاگرانژی کلی زیر معرفی می‌شود

$$\hat{L}_0=L_0-\tilde{L}_0 \qquad (۲)$$

$$\begin{aligned}L_0&=\bar{\psi}^{(0)}(x)\iota\gamma^{\upsilon}\partial_{\upsilon}\psi^{(0)}(x),\\ \tilde{L}_0&=-\bar{\tilde{\psi}}^{(0)}(x)\iota\gamma^{\upsilon}\partial_{\upsilon}\tilde{\psi}^{(0)}(x)\end{aligned} \qquad (۳)$$

عملگر همیوغ هر عملگر دلخواه در فضای آینه‌ی برابر $\tilde{c}\tilde{A}=c^*\tilde{A}$ است که c عدد ثابت است. در وارون دمای کند تغییر $\beta_t=\beta(T)=1/T_t$ و پتانسیل شیمیایی μ، متوسط گرمایی یک عملگر میدان A به‌صورت زیر است

$$\langle A\rangle=\frac{TrAe^{-\beta_t(H_0-\mu Q)}}{Tre^{-\beta_t(H_0-\mu Q)}}, \qquad (۴)$$

که هامیلتونی و عملگر بار به‌ترتیب عبارت هستند از

$$H_0=\int_{-\infty}^{\infty}dp|p|[b^+(p)b(p)+d^+(p)d(p)] \qquad (۵)$$

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}dp[b^+(p)b(p)-d^+(p)d(p)] \qquad (۶)$$

که $b(p),d(p),b^+(p),d^+(p)$ عملگرهای نابودی و خلق فرمیونی و آنتی فرمیونی در فضای فوریه می‌باشند.

میدان فرمیونی فضای اصلی بر حسب عملگرهای خلق و نابودی به‌صورت زیر است

$$\psi^{(0)}(x^{\pm})=\int_0^{\infty}dp\left\{f_p(x^{\pm})b(\mp p)+f_p^*(x^{\pm})d^{\dagger}(\mp p)\right\}$$

$$f_p(x^{\pm})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ipx^{\pm}}, \qquad (۷)$$

میدان فضای آینه‌ای نیز برحسب عملگرهای خلق و نابودی فضای آینه‌ی مانند عبارت بالا نوشته می‌شود.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]

برای محاسبه تابع برهمکنش دو نقطه‌ی فرمیونی در دمای متناهی لازم است که از دیدگاه تعمیم یافته میدان گرمایی که توسط اوجیما [6] معرفی گردید، برای وارد کردن پتانسیل شیمیایی استفاده کنیم. در این دیدگاه متوسط گرمایی یک کمیت، در خلا گرمایی $|0(\beta_t,\mu)\rangle$ محاسبه می‌شود که خلا گرمایی از تاثیر تابع یکانی روی خلا فضای دوگان حاصل می‌شود

$$|0(\beta_t,\mu)\rangle = U_F[\theta_F(\beta_t,\mu)]|0,\tilde{0}\rangle, \qquad (۸)$$

که در فضای دوگان عملگر یکانی بدین صورت است

$$\begin{aligned} U_F[\theta_F(\beta_t,\mu)] &= \exp[-i\int_{-\infty}^{\infty} dp \\ &[(\tilde{b}(p)b(p)+b^+(p)\tilde{b}^+(p))\theta(|p|,\beta_t,-\mu) \\ &+(\tilde{d}(p)b(p)+d^+(p)\tilde{d}^+(p))\theta(|p|,\beta_t,\mu)]] \end{aligned} \qquad (۹)$$

که $\theta(|p|,\beta_t,\mu)$ با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شوند

$$\cos\theta(p;\beta_t,\mu) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\beta_t(p+\mu)}}}, \qquad (۱۰)$$

$$\sin\theta(p;\beta_t,\mu) = \frac{e^{-\frac{\beta_t}{2}(p+\mu)}}{\sqrt{1+e^{-\beta_t(p+\mu)}}}, \qquad (۱۱)$$

عملگرهای نابودی تبدیل یافته در فضای دوگان با استفاده از عملگر یکانی بدین صورت محاسبه می‌شوند

(۱۲)

$$\begin{aligned} b(p;\beta_t,\mu) &= U_F^{-1}[\theta(\beta_t,\mu)]b(p)U_F[\theta(\beta_t,\mu)] \\ &= b(p)\cos\theta(p;\beta_t,-\mu)+i\tilde{b}^\dagger(p)\sin\theta(p;\beta_t,-\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(p;\beta_t,\mu) &= U_F^{-1}[\theta(\beta_t,\mu)]d(p)U_F[\theta(\beta_t,\mu)] \\ &= d(p)\cos\theta(p;\beta_t,\mu)+i\tilde{d}^\dagger(p)\sin\theta(p;\beta_t,\mu), \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

عملگرهای معادل در فضای آینه‌ی با استفاده از همیوغ هرمیتی محاسبه می‌شوند. با استفاده از این روابط متوسط گرمایی حاصلضرب عملگرهای خلق و نابودی عبارتند از

(۱۴)

$$\langle 0_F(\beta_t,\mu)|b(p)b^\dagger(k)|0_F(\beta_t,\mu)\rangle = \frac{\delta(p-k)}{1+e^{-\beta_t(|p|-\mu)}}$$

(۱۵)

$$\langle 0_F(\beta_t,\mu)|b^\dagger(p)b(k)|0_F(\beta_t,\mu)\rangle = \frac{e^{-\beta_t(|p|-\mu)}\delta(p-k)}{1+e^{-\beta_t(|p|-\mu)}}$$

(۱۶)

$$\langle 0_F(\beta_t,\mu)|d^\dagger(p)d(k)|0_F(\beta_t,\mu)\rangle = \frac{e^{-\beta_t(|p|+\mu)}\delta(p-k)}{1+e^{-\beta_t(|p|+\mu)}}$$

(۱۷)

$$\langle 0_F(\beta_t,\mu)|d(p)d^\dagger(k)|0_F(\beta_t,\mu)\rangle = \frac{\delta(p-k)}{1+e^{-\beta_t(|p|+\mu)}}$$

به همین ترتیب میدان فرمی در فضای اصلی و فضای آینه‌ی در پایه میدان گرمایی با استفاده از عملگرهای خلق و نابودی تبدیل یافته عبارت هستند از

$$\begin{aligned} \psi^{(0)}(x^\pm;\beta_t,\mu) &= \int_0^\infty dp\{f_p(x^\pm) \\ &(b(\mp p)\cos\theta(p;\beta_t,-\mu)+i\tilde{b}^\dagger(\mp p)\sin\theta(p;\beta_t,-\mu)) \\ &+f_p^*(x^\pm) \\ &(d^\dagger(\mp p)\cos\theta(p;\beta_t,\mu)-i\tilde{d}(\mp p)\sin\theta(p;\beta_t,\mu))\}, \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{(0)}(x^\pm;\beta_t,\mu) &= \int_0^\infty dp\{f_p^*(x^\pm) \\ &(\tilde{b}(\mp p)\cos\theta(p;\beta_t,-\mu)-ib^\dagger(\mp p)\sin\theta(p;\beta_t,-\mu)) \\ &+f_p(x^\pm) \\ &(\tilde{d}^\dagger(\mp p)\cos\theta(p;\beta_t,\mu)+id(\mp p)\sin\theta(p;\beta_t,\mu))\}, \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با استفاده از روابط (۱۴-۱۷) می‌توان تابع برهمکنش دو نقطه‌ی فرمیونی دوگان را محاسبه نمود. خواهیم دید که وابستگی پتانسیل شیمیایی میدان‌های فرمیونی بدون جرم مورد مطالعه در محاسبه تابع دو نقطه‌ی سامانه به صورت یک جمله نمایی جدا خواهد بود. داریم

$$\begin{aligned} &\langle 0_F(\beta_t,\mu)|\psi^{(0)}(x^\pm)\psi^{(0)\dagger}(y^\pm)|0_F(\beta_t,\mu)\rangle = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dp\{e^{-ip(x^\pm-y^\pm)}\cos^2\theta(p;\beta_t,-\mu) \\ &+e^{+ip(x^\pm-y^\pm)}\sin^2\theta(p;\beta_t,\mu)\} \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

با استفاده از روابط (۱۰و ۱۱) و یک تغییر در متغیر $p-\mu\to p$ داریم

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]

$$\langle 0_F(\beta_t,\mu)|\psi^{(0)}(x^{\pm})\psi^{(0)\dagger}(y^{\pm})|0_F(\beta_t,\mu)\rangle = e^{-i\mu(x^{\pm}-y^{\pm})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\{e^{-ip(x^{\pm}-y^{\pm})}\frac{1}{1+e^{-\beta_t p}}\} \quad (۲۱)$$

در رابطه بالا قسمت زیر انتگرال برابر مولفه قطری تابع گرمایی دو نقطه‌ی در پتانسیل شیمیایی صفر می‌باشد

$$\langle 0_F(\beta_t)|\psi^{(0)}(x^{\pm})\psi^{(0)\dagger}(y^{\pm})|0_F(\beta_t)\rangle = \frac{1}{2i\beta_t\sinh\frac{\pi}{\beta_t}(x^{\pm}-y^{\pm}-i\varepsilon)} \quad (۲۲)$$

با استفاده از روابط (۲۱و۲۲) برای $\mu\neq 0$ نتیجه زیر حاصل می‌شود

(۲۳)

$$\langle 0_F(\beta_t,\mu)|\psi^{(0)}(x^{\pm})\psi^{(0)\dagger}(y^{\pm})|0_F(\beta_t,\mu)\rangle = e^{-i\mu(x^{\pm}-y^{\pm})}\langle 0_F(\beta_t)|\psi^{(0)}(x^{\pm})\psi^{(0)\dagger}(y^{\pm})|0_F(\beta_t)\rangle$$

همانگونه که مشاهده می‌شود وابستگی تابع دو نقطه‌ی به پتانسیل شیمیایی به صورت یک المان فازی می‌باشد.

به روش مشابه می‌توان المان قطری فضای آینه‌ی را نیز بدست آورد

(۲۴)

$$\langle 0_F(\beta_t,\mu)|\tilde{\psi}^{(0)}(x^{\pm})\tilde{\psi}^{(0)\dagger}(y^{\pm})|0_F(\beta_t,\mu)\rangle = e^{i\mu(x^{\pm}-y^{\pm})}\langle 0_F(\beta_t)|\tilde{\psi}^{(0)}(x^{\pm})\tilde{\psi}^{(0)\dagger}(y^{\pm})|0_F(\beta_t)\rangle$$

و تابع برهمکنش دو نقطه‌ی غیر قطری نیز بدین صورت بدست می‌آید

(۲۵)

$$\langle 0_F(\beta_t,\mu)|\tilde{\psi}^{(0)\dagger}(x^{\pm})\psi^{(0)\dagger}(y^{\pm})|0_F(\beta_t,\mu)\rangle = e^{-i\mu(x^{\pm}-y^{\pm})}\langle 0_F(\beta_t)|\tilde{\psi}^{(0)\dagger}(x^{\pm})\tilde{\psi}^{(0)\dagger}(y^{\pm})|0_F(\beta_t)\rangle$$

که تابع دو نقطه‌ی غیر قطری در غیاب پتانسیل شیمیایی عبارت است از

$$\langle 0_F(\beta_t)|(-i)\tilde{\psi}^{(0)\dagger}(x^{\pm})\psi^{(0)\dagger}(y^{\pm})|0_F(\beta_t)\rangle = \frac{1}{2i\beta_t\sinh\frac{\pi}{\beta_t}(x^{\pm}-i\frac{\beta_t}{2}-y^{\pm}+i\varepsilon)} \quad (۲۶)$$

در حالت کلی تابع برهمکنش 2n نقطه‌ی عبارت است از

$$\begin{aligned}&\langle 0_F(\beta_t)|\psi^{(0)}(x_1^{\pm})...\psi^{(0)}(x_n^{\pm})\\&\psi^{(0)\dagger}(y_1^{\pm})...\psi^{(0)\dagger}(y_n^{\pm})|0_F(\beta_t)\rangle = \\&\exp\left(-i\mu(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\pm}-\sum_{j=1}^{n}y_i^{\pm})\right)\times\\&\frac{\prod_{i<i'}^{n}\Omega(x_i^{\pm}-x_{i'}^{\pm};\beta_t)\prod_{j<j'}^{n}\Omega(y_j^{\pm}-y_{j'}^{\pm};\beta_t)}{\prod_{i,j=1}^{n}\Omega(x_i^{\pm}-y_j^{\pm}-i\varepsilon(x_i^0-y_j^0);\beta_t)}\end{aligned} \quad (۲۷)$$

$$\Omega(x;\beta_t) = 2i\beta_t\sinh(\frac{\pi}{\beta_t}x). \quad (۲۸)$$

همانگونه که مشخص است در تابع برهمکنش 2n نقطه ی نیز پتانسیل شیمیایی به صورت فاکتور جدا در کنار تابع برهمکنش سامانه بدون پتانسیل شیمیایی ظاهر شده است.

۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله سامانه فرمیونی بدون جرمی با پتانسیل شیمیایی ثابت را در دمای متناهی مورد بررسی به روش عملگری میدان گرمایی مورد بررسی قرار دادیم، البته با در نظر گرفتن این فرض که دما به صورت بی‌دررو تغییر می‌کند. سپس در این شرایط تابع برهمکنش دونقطه‌ای قطری و غیرقطری سامانه را محاسبه نمودیم و مشاهده شد که نتیجه حاصل به صورت حاصلضرب تابع برهمکنش دو نقطه‌ای در پتانسیل شیمیایی صفر در وابستگی نمایی پتانسیل شیمیایی میباشد و جمله پتانسیل شیمیایی بخش جدایی پذیری از جمله تابع برهمکنش دمایی متغیر با زمان می‌باشد و در نهایت درستی این نتیجه را برای تابع برهمکنش 2n نقطه‌ای نیز نشان دادیم.

مراجع

[1] Rammer J., *Quantum field theory of nonequilibrium states*, Cambridge University Press, Cambridge, (2007)

[2] Das A., *finite temperature field theory*, World Science, Singapore, 1997.

[3] Khanna F, C., etc., thermal quantum field theoy: Algebric aspects and applications, World Scientific, Singapore, (2009).

[4] Umezawa. H., Matsumoto. H., Thermofield dynamics and condensed states, North Holland, Amesterdam, (1982).

[5] Kheirandish F., Jafari. M, *Finite temperature electromagnetic field quantization in a medium: the thermofield approach*, **Phys. Rev A** 84 (2011) 062120.

[6] Amaral R. L., Belvedere L. V., and Rothe K. D., *Two-Dimensional Thermofield Bosonization II: Massive Fermions*, **Ann. Phys**. 323 (2008) 2662.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]