بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

# مداخله پوشش متاماده‌ی ناپدید کننده در درهم‌تنیدگی دو اتم دوترازه

عموقربان، احسان ؛ مهدی‌فر، علی؛ هارونی، بهناز؛

دانشگاه شهرکرد، دانشکده علوم، گروه فیزیک

**چکیده- در این مقاله، با استفاده از کوانتش میدان الکترومغناطیسی به روش پدیده شناختی، برهم‌کنش دو اتم دو ترازی را در مجاورت پوشش متاماده‌ی ناپدیدکننده بررسی می‌کنیم. بدین منظور با استفاده از سنجه‌ی منفیت نشان می‌دهیم که دو اتم مزبور توسط گسیل خودبه خودی و با میانجی‌گری پوشش متاماده درهم‌تنیده می‌شوند ولی این میزان درهم‌تنیدگی کمتر از زمانی است که پوشش ناپدیدکننده وجود ندارد.**

کلید واژه-درهم‌تنیدگی، منفیت، پوشش ناپدیدکننده

# Mediation of Invisibility Meta-material Clocking in Entanglement of Two Two–level Atoms

Amooghorban, Ehsan; Mahdifar, Ali; Harouni, Behnaz

**Department of Physics, Faculty of Science, Shahrekord University**

Abstract- In this paper, by employing the quantization of the electromagnetic field in phenomenological approach, we investigate the interaction of two two-level atoms in the presence of invisibility meta-material cloaking. For this purpose, by using negativity measure we show that two aforementioned atoms are entangled via the spontaneous emission and mediation of the meta-material cloaking, but this degree of entanglement is less than when there is no the invisibility cloaking.

Keywords:entanglement, negativity, invisibility cloaking

[ Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14 ]



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

## ۱- مقدمه

اینیشتین، پادولوسکی و روزن با به کارگیری پارادوکس مشهور خود نشان دادند که حالت‌های دو سامانه در حالت کلی از یکدیگر جداپذیر نیستند، حتی اگر از یکدیگر دور باشند. آن‌ها ادعا نمودند که این موضوع با حقیقت فیزیکی یعنی موضعیت در تناقض است و در نتیجه مکانیک کوانتومی نمی‌تواند یک نظریه‌ی کامل برای توصیف طبیعت باشد. شرودینگر این خاصیت ناب کوانتومی را درهم‌تنیدگی نامید. امروزه درهم‌تنیدگی یکی از چشم‌گیرترین ویژگی‌های مکانیک کوانتومی است که توجه بسیاری را در حوزه‌های مختلف به خصوص در زمینه‌ی نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی و ارتباطات به خود جلب کرده است و یک منبع بالقوه برای ارتباطات و پردازش‌های اطلاعات است[۱]. در عمل، تعیین این‌که آیا سامانه‌هایی با حالت‌های کاملا دلخواه را می‌توان به شکل جداپذیر نوشت و یا نه بسیار مشکل است، از این رو به سنجه‌هایی برای تعیین درجه درهم‌تنیدگی سامانه کوانتومی نیاز داریم. یکی از مناسب‌ترین سنجه‌ها برای بررسی درهم‌تنیدگی سامانه‌ی مخلوط آماری، سنجه‌ی منفیت (negativity) است.

متامواد به موادی مصنوعی گفته می‌شود که دارای ویژگی‌های نامتعارف الکترومغناطیسی در ساختار وجودی خود است. یکی از ویژگی‌های غیر معمول این مواد فراهم کردن ضریب شکست منفی است، به این معنا که این مواد نور را در جهت مخالف مواد طبیعی شکست می‌دهند [۲]. از دیگر ویژگی‌های این مواد می‌توان به ضریب شکست مثبت با هر مقدار دلخواه، اشاره کرد. متامواد ویژگی‌های خود را بیشتر از ساختار واحدهای اجزا تشکیل دهنده‌ی خود دریافت می‌کنند. این مواد را می توان از ترکیب میله‌های زیرطول موجی و مجموعه‌ای از مشددهای حلقه‌ای فلزی کوچک و مانند آنها ساخت، که این واحدهای زیر طول موجی به متا اتم یا متا مولکول معروف هستند. از جمله کاربردهای دیگر متامواد می‌توان به توانایی آن‌ها در ساخت پوشش‌هایی با قابلیت ناپدیدکردن اجسام نام برد. بر این اساس پرتوهای نوری که بر این پوشش‌های متامادّه فرود می‌آیند، پیرامون پوشش منحرف می‌شوند و در نهایت در طرف دیگر دوباره جمع شده و دقیقا در همان مسیر قبلی به راه خود ادامه می‌دهند. بنابراین این پوشش و شیء واقع شده درون آن از دید ناظر بیرونی پنهان باقی می‌ماند. تاکنون ارزیابی عملکرد این پوشش‌ها فقط در حوزه کلاسیک مورد بحث قرار گرفته است. از طرف دیگر، با توجه به این‌که درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی یک پدیده‌ی صرفا کوانتومی است، به عنوان یکی از اهداف اصلی در این مقاله، به مطالعه‌ی درهم‌تنیدگی حالت‌های دو اتمی که بطور متقارن در مجاورت یک پوشش متامادّه‌ی ناپدیدکننده واقع شده اند می‌پردازیم. در این‌جا انتظار داریم که اگر این پوشش‌ها همانند رژیم کلاسیکی عملکرد ناپدیدکنندگی خوبی از خود نشان دهند، هیچ در هم‌تنیدگی بین حالت‌های اتمی مشاهده نشود.

## ۲- معادلات پایه

در این مقاله یک پوشش ناپدید کننده کروی ناهمسانگرد و جاذب با شعاع درونی $a_1$ و بیرونی $a_2$ را در نظر می‌گیریم، که مطابق مرجع [۳] تانسور گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\varepsilon}}(r,\omega)&=\varepsilon_0\left[\left(\varepsilon_r-\varepsilon_t\right)\right]\hat{r}\hat{r}+\varepsilon_t\overline{\overline{I}},\\ \overline{\overline{\mu}}(r,\omega)&=\mu_0\left[\left(\mu_r-\mu_t\right)\right]\hat{r}\hat{r}+\mu_t\overline{\overline{I}},\end{aligned}\qquad(۱)$$

در این رابطه $\overline{\overline{I}}=\hat{r}\hat{r}+\hat{\theta}\hat{\theta}+\hat{\phi}\hat{\phi}$ تانسور واحد و

(۲)

$$\varepsilon_r(r,\omega)=\mu_r(r,\omega)=\frac{a_2}{a_2-a_1}\left(\frac{(r-a_1)^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{\omega_p}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\right),$$
$$\varepsilon_t(\omega)=\mu_t(\omega)=\frac{a_2}{a_2-a_1}\left(1+\frac{\omega_p{}^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\right),$$

هستند، که در آن $\omega_p$ بسامد پلاسما و $\gamma$ ضریب جذب پوشش است. در این‌جا گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی شیء ناپدید شونده‌ای که در مرکز پوشش واقع می‌شود را به صورت همگن و همسانگرد $\varepsilon(\omega)=\mu(\omega)=1.3\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\right)$ در نظر می‌گیریم. اکنون به‌منظور سادگی محاسبات دو اتم دو ترازی یکسان با بسامدهای گذار $\omega_A=\omega_B$ که بطور متقارن در راستای محور $z$ ها و در مکان‌های $r_A=r_B=r$ از مرکز پوشش کروی ناپدیدکننده واقع شده‌اند را در نظر می‌گیریم. در ادامه به منظور بررسی درهم‌تنیدگی دو اتم از طریق گسیل خودبخودی و مداخله پوشش، ابتدا کوانتش امواج الکترومغناطیسی را در حضور محیط‌های پاشنده و جاذب مورد مطالعه قرار می‌دهیم. کوانتش امواج الکترومغناطیسی در حضور ماده‌ی جاذب و پاشنده را می‌توان به دو روش لاگرانژی و پدیده شناختی انجام داد. در اینجا به منظور سادگی محاسبات رهیافت پدیده شناختی را دنبال می کنیم. بر این اساس میدان الکتریکی بر حسب انتگرال فضایی از حاصلضرب تانسور گرین کلاسیکی $\overline{\overline{G}}(\mathrm{r}\ '\omega)$ که در معادله‌ی موج $\left[\nabla\times\overline{\overline{\mu}}^{-1}(\mathrm{r},\omega)\nabla\times-\frac{\omega^2}{c^2}\overline{\overline{\varepsilon}}(\mathrm{r},\omega)\right]\overline{\overline{G}}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\delta(\mathrm{r}-\mathrm{r}')$ صدق می‌کند، با چشمه‌های نوفه $\hat{\mathrm{f}}_\lambda(r,\omega)$ نوشته می‌شود. این چشمه‌های نوفه در روابط جابه‌جایی میدان‌های بوزونی زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned}&\left[\hat{f}_{\lambda i}(\mathbf{r},\omega),\hat{f}^{\dagger}_{\lambda' j}(\mathbf{r}',\omega')\right]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ij}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(\omega-\omega'),\\ &\left[\hat{f}_{\lambda i}(\mathbf{r},\omega),\hat{f}_{\lambda' j}(\mathbf{r}',\omega')\right]=0.\end{aligned}\qquad(۳)$$

در این‌جا، $\lambda=e,m$ به ترتیب به برانگیختگی‌های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی اشاره دارد. هامیلتونی برهمکنش اتم و میدان الکترومغناطیسی با فرض تقریب امواج چرخان و تقریب دوقطبی الکتریکی در حضور پوشش کروی ناپدیدکننده به شکل زیر نوشته می‌شود [۴]



[ Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14 ]

$$H=\sum_{\lambda=e,m}\int d^3r\int_0^\infty d\omega\,\mathbf{f}_\lambda^\dagger(r,\omega)\cdot\mathbf{f}_\lambda(r,\omega)$$
$$+\sum_{j=A,B}\hbar\omega_j\sigma^\dagger\sigma-\sum_{j=A,B}\left[\sigma^\dagger\mathbf{d}_j\cdot\int_0^\infty d\omega\,\mathbf{E}(r_j,\omega)+h.c.\right] \quad (۴)$$

که در آن $\sigma_j^\dagger=|U_j\rangle\langle L_j|$ و $\sigma_j=|L_j\rangle\langle U_j|$ به ترتیب عملگرهای پایین‌برنده و بالابرنده‌ی پائولی و $|U_j\rangle$ و $|L_j\rangle$ به ترتیب تراز پایه و برانگیخته‌ی اتم دوترازی $j$ ام را نشان می‌دهند. کمیت $d_j$ که بیانگر گشتاور دوقطبی اتم است به صورت $d_{jk}=\langle U_j|\hat{d}_k|L_j\rangle$ تعریف می‌شود. بردار حالت کل سامانه شامل دو اتم و پوشش کروی ناپدیدکننده و میدان برهم‌کنشی با آن‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم

$$|\psi(t)\rangle=\sum_{j=A,B}C_{U,j}(t)e^{-i\tilde{\omega}_j t}|0\rangle|U_j\rangle$$
$$+\sum_{\lambda=e,m}\int d^3r\int_0^\infty d\omega\,e^{-i\omega t}C_{\lambda,l}(\mathbf{r},\omega,t)|\mathbf{1}_{\lambda,l}(\mathbf{r},\omega)\rangle|L\rangle, \quad (۵)$$

که ضرایب $C_{U\,j}(t)$ و $C_{\lambda L}(r,\omega,t)$ به ترتیب دامنه‌های احتمال پیدا کردن سامانه در حالت اولیه $|0\rangle|U_j\rangle$ و حالت نهایی $|1_\lambda(r,\omega)\rangle|L_j\rangle$ هستند. در اینجا، بسامد $\tilde{\omega}_j$ به صورت $\tilde{\omega}_j=\omega_j-\delta_{AB}$ تعریف می‌شود که $\delta_{AB}$ جابه‌جایی لمب و تغییر گذار اتم در حضور متاماده‌ی ناپدیدکننده را نشان می‌دهد. اکنون با استفاده از معادله‌ی شرودینگر و به کار بردن بردار حالت (۵)، داریم

$$\dot{C}_{uj}(t)=-i\sum_j\delta_{AB}C_{uj}(t)+\sum_{j'=A',B'}\int_0^t dt'\overline{\overline{K}}_{jj'}(t-t')C_{uj'}(t'), \quad (۶)$$

که در آن تانسور کرنل $\overline{\overline{K}}_{jj'}(t-t')$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\overline{\overline{K}}_{jj'}(\mathrm{t},\mathrm{t}')=-\frac{1}{\pi\varepsilon_0\hbar}\int_0^\infty d\omega$$
$$\times[\frac{\omega^2}{C^2}e^{-i(\omega-\omega_j)t}e^{i(\omega-\tilde{\omega}_{j'})(t-t')}d_j\,\mathrm{Im}\overline{\overline{G}}(r_j,r_{j'},\omega)d_{j'}]. \quad (۷)$$

با معرفی متغیرهای جدید $C_\pm(t)=2^{-1/2}\left[C_{UA}(t)\pm C_{UB}(t)\right]$، معادله‌ی (۶) از حالت جفت‌شده بین دواتم $A$ و $B$ خارج شده و به صورت معادله‌ای ساده‌تر (ولی همچنان جفت‌شده) برحسب متغیرهای جدید نوشته می‌شود

$$\dot{C}_\pm(t)=\int_0^t dt'\overline{\overline{K}}_\pm(t-t')C_\pm(t'). \quad (۸)$$

حل دقیق معادله‌ی (۸) فقط به صورت عددی امکان پذیر است، ولی این معادله را می‌توان به صورت تحلیلی در دو رژیم جفت‌شدگی ضعیف و قوی نیز حل کرد. در اینجا با مقایسه داده‌های تجربی بدست آمده از گسیل خودبخودی نقطه های کوانتومی با ساختارهای ساخته شده از پوشش‌های ناپدیدکننده که در ناحیه بسامدی مایکروویو واقع شده‌اند، مشاهده می‌کنیم که رژیم جفت‌شدگی ضعیف صادق است. در رژیم جفت‌شدگی ضعیف با به‌کاربردن تقریب مارکوف و جایگذاری ضریب $C_\pm(t')$ در انتگرالده رابطه‌ی (۸) با ضریب $C_\pm(t)$ و به کار بردن رابطه انتگرالی $\int_0^t dt'e^{-i(\omega-\tilde{\omega}_j)(t-t')}\to\pi\delta(x)+ip\left(\frac{1}{x}\right)$ خواهیم داشت

$$C_\pm(t)=e^{(-\Gamma_\pm/2+i\delta_\pm)t}C_\pm(0). \quad (۹)$$

که $\Gamma_\pm=\Gamma_{AA}\pm\Gamma_{AB}$، $\delta_\pm=\delta_{AA}\pm\delta_{AB}$ و

$$\delta_{AB}=\frac{1}{\hbar\pi\varepsilon_0}P\int_0^\infty d\omega\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mathbf{d}_A\cdot\mathrm{Im}\overline{\overline{G}}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_B,\omega)\cdot\mathbf{d}_B}{\omega-\omega_A}, \quad (۱۰)$$
$$\Gamma_{AB}=\frac{2\omega_A^2}{\hbar\varepsilon_0c^2}\mathbf{d}_A\cdot\mathrm{Im}\overline{\overline{G}}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_B,\omega)\cdot\mathbf{d}_B,$$

است. در رابطه‌ی بالا $P$ مقدار اصلی کوشی است و $\Gamma=\Gamma_{AA}=\Gamma_{BB}$ آهنگ واپاشی اتم به صورت گسیل خودبخودی را نشان می‌دهد. اکنون مطابق مرجع [۵] تانسور گرین متناظر با پراکندگی از پوشش متاماده به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\overline{\overline{G}}^{S}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)=\frac{ik_0}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(2-\delta_m^0)\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$
$$\times\left\{\left[M_{\substack{e\\o}mn}^{(1)}(k_0)B_M^{11}M_{\substack{e\\o}mn}'^{(1)}\right]+\left[N_{\substack{e\\o}mn}^{(1)}(k_0)B_N^{11}N_{\substack{e\\o}mn}'^{(1)}\right]\right\}. \quad (۱۱)$$

که به علت طولانی بودن ضرایب از معرفی آن‌ها صرف نظر کرده‌ایم ولی این ضرایب به صورت مفصل در مرجع [۵] معرفی شده‌اند. اکنون با معرفی عملگر چگالی کل سامانه به صورت $\rho_{Total}=|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ و جایگذاری رابطه‌ی (۵) در آن و عمل ردگیری روی درجات آزادی میدان الکترومغناطیسی، عملگر چگالی کاهش‌یافته‌ی اتمی برحسب پایه‌های تعریف شده‌ی $|1\rangle=|L_A\rangle\otimes|L_B\rangle$، $|2\rangle=|U_A\rangle\otimes|U_B\rangle$، $|3\rangle=|L_A\rangle\otimes|U_B\rangle$ و $|4\rangle=|U_A\rangle\otimes|L_B\rangle$ به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\rho_a=|C_{UA}(t)|^2|4\rangle\langle4|+C_{UA}(t)C^*_{UB}(t)|4\rangle\langle3|$$
$$+C_{UB}(t)C^*_{UA}(t)|3\rangle\langle4|+|C_{UB}(t)|^2|3\rangle\langle3| \quad (۱۲)$$
$$+(1-|C_{UA}(t)|^2-|C_{UB}(t)|^2)|1\rangle\langle1|.$$

همانطور که قبلا توضیح داده شد یکی از مناسب‌ترین سنجه‌ها برای بررسی درهم‌تنیدگی سامانه‌ی مخلوط آماری سنجه‌ی منفیت است. در واقع این سنجه یک شرط لازم وکافی برای تعیین میزان درهم‌تنیدگی سامانه‌های دو بخشی با ابعاد فضای هیلبرت دو در بی‌نهایت است. این سنجه بر اساس ترانهاده جزئی ماتریس چگالی $\rho^{T1}$ به صورت $N=\sum_i\frac{|\mu_i|-\mu_i}{2}$ تعریف می‌شود که $\mu_i$ ویژه مقادیر عملگر ترانهاده‌ی جزئی $\rho_a^{T1}$ است. اکنون با بکاربردن رابطه‌ی (۱۲) و بدست آوردن ویژه مقادیر عملگر $\rho_a^{T1}$، منفیت به

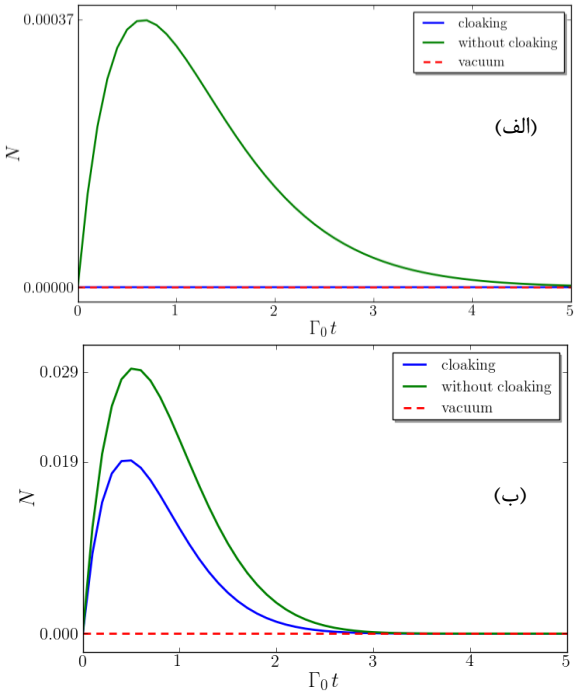


[ Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14 ]

شکل زیر نوشته می‌شود

$$N=\frac{1}{2}\{(|C_{uA}|^2+|C_{uB}|^2-1) \qquad (۱۳)$$
$$+\sqrt{(|C_{uA}|^4+|C_{uB}|^4+6|C_{uA}|^2|C_{uB}|^2+1-2|C_{uA}|^2-2|C_{uB}|^2)}\}$$

در شکل ۱ نتایج عددی منفیت (۱۲)، برحسب زمان بدون بعد $\Gamma_0 t$ در نواحی دور و نزدیک از بسامد تشدید پوشش متاماده و با فرض اینکه دو اتم دوترازی در وضعیت اولیه درهم تنیده نیستند، رسم شده است. همانگونه که مشاهده می‌کنیم پوشش متاماده در نواحی نزدیک بسامد تشدید به‌خوبی عمل می‌کند و عملا دو اتم درهم‌تنیده نیستند (شکل ۱ (الف)). درحالیکه در نواحی دور از بسامد تشدید، اگرچه پوشش متاماده میزان درهم‌تنیدگی را کاهش داده، ولی همچنان نسبت به وضعیت خلاء درهم‌تنیده هستند(شکل ۱ (ب)). بعلاوه، همانطور که انتظار داریم در زمان‌های دور نسبت به زمان واپاشی اتم برانگیخته، در هر دو ناحیه‌ی بسامدی نزدیک و دور از بسامد تشدید، هیچ درهم‌تنیدگی مشاهده نمی‌شود.




شکل ۱: منفیت (۱۲)، در ناحیه‌ی بسامدی نزدیک (الف) و دور (ب) از بسامد تشدید پوشش رسم شده است.

سپاسگزاری

نویسندگان، از معاونت تحصیلات تکمیلی دانشگاه شهرکرد برای حمایتهای انجام شده قدردانی می‌نمایند.

مراجع

[1] Bennett C. H., and Wiesner S. J., Communication via one-and two –particle operators on Einstein podolsky-Rosen states **Phys. Rev. Lett**. 69, 2881 (1992).

[2] Pendry J. B., *Negative Refraction Makes a Perfect Lens* **physical review letters** *85* 18 (2000).

[3] Pendry J. B., Schurig D., and Smith D. R., *Controlling Electromagnetic Fields*, **Science** 312, 1780 (2006).

[4] Dung H.T., L. Knöll and Welsch D.G, Spontaneous decay in the presence of dispersing and absorbing bodies: General theory and application to a spherical cavity, **Phys. Rev. A** 62,053804 (2000).

[۵] عموقربان ا.، مهدیفر ع.، مرشد بهبهانی م.، چوپانیان ش.، *آهنگ گسیل خودبه‌خودی یک اتم دوترازی برانگیخته در حضور یک پوشش متاماده‌ی ناپدیدکننده*، **مقاله‌نامه کنفرانس فیزیک ایران**، ۲۰۱-۲۰۴ (۱۳۹۳).



[ Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14 ]