بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

درهم‌تنیدگی کوانتومی ناشی از برهم‌کنش غیرخطی یک اتم سه‌ترازی در حال حرکت با یک میدان دومدی با گذارهای دوفوتونی

مهناز قربانی، حسن صفری و محمّدجواد فقیهی

گروه فیزیک و فوتونیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، ماهان، کرمان

چکیده - در این مقاله، مدلی تحلیلی برای برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی در حال حرکت نوع Λ با یک میدان دومدی در حضور گذارهای دوفوتونی و در رژیم جفت‌شدگی وابسته به شدت ارائه می‌شود. بعد از مشخص کردن شرایط اولیه برای اتم و میدان، شکل صریح بردار حالت سامانه با استفاده از عملگر تحول زمانی به‌دست می‌آید. به منظور مطالعه‌ی درهم‌تنیدگی بین دو زیرسامانه‌ی اتم و میدان، رفتار زمانی آنتروپی فون نویمن، به عنوان معیاری از درجه‌ی درهم‌تنیدگی، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

کلید واژه- اتم سه‌ترازی در حال حرکت، میدان دومدی، گذار دوفوتونی، جفت‌شدگی وابسته به شدت، درهم‌تنیدگی کوانتومی.

کد PACS – ۲۷۰/۰۲۷۰

Quantum Entanglement due to Nonlinear Interaction between a Moving Three-Level Atom and a Two-Mode Field with Two-Photon Transitions

Mahnaz Ghorbani, Hassan Safari and Mohammad Javad Faghihi

Physics and Photonics Department, Graduate University of Advanced Technology, Mahan, Kerman

Abstract- In this paper, an analytical model for the interaction between a moving Λ -type three-level atom and a two-mode radiation field is presented with two-photon transition and in the intensity-dependent coupling regime. After specifying the initial conditions for the atom and the field, the explicit form of the state vector of the entire system is obtained via the time evolution operator. In order to study the entanglement between subsystems, atom and field, temporal behavior of the von Neumann entropy, as a measure of entanglement, is examined.

Keywords: Moving three-level atom, Two-mode field, Two-photon transition, Intensity-dependent coupling, Quantum entanglement.

PACS No: 270. 0270

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

درهم‌تنیدگی شکلی از برهم‌نهی کوانتومی و یکی از ویژگی‌های برجسته‌ی مکانیک‌کوانتومی است که همتای کلاسیکی ندارد. امروزه حالت‌های درهم‌تنیده نقشی اساسی در اطلاعات کوانتومی دارند [۱]. از آن جهت که این کمیت به عنوان جزئی اساسی در توصیف ویژگی‌های ساختاری سامانه‌های کوانتومی مرکب مورد استفاده قرار می‌گیرد، تحلیل ویژگی‌های درهم‌تنیدگی زیرسامانه‌ها درخور توجّه است. یکی از مهم‌ترین سامانه‌های فیزیکی در دسترس که می‌تواند گزینه‌ی مناسبی برای تولید این حالت‌ها باشد، سامانه‌های برهم‌کنشی اتم-میدان است که با مدل جینز-کامینگز توصیف می‌شود [۲]. اهمّیت بالای این مدل به دلیل آن است که نتایج حاصل از این مدلِ کاملاً کوانتومی با تجربه‌های آزمایشگاهی سازگار است [۳]. در این مقاله، با استفاده از مدل جینز-کامینگز تعمیم‌یافته، برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی در حال حرکت نوع Λ با یک میدان دومدی مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض بر این است که گذارهای اتمی با گسیل دوفوتون همراه و جفت‌شدگی اتم و میدان وابسته به شدت باشد. پس از یافتن شکل دقیق هامیلتونی توصیف‌کننده‌ی برهم‌کنش، بردار حالت سامانه به‌طور کاملاً تحلیلی به‌دست می‌آید. در آخر، درهم‌تنیدگی کوانتومی بین زیرسامانه‌های اتم و میدان با استفاده از آنتروپی کاهش‌یافته‌ی فون‌نویمن مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲- فرمول‌بندی نظری

مدلی را در نظر می‌گیریم که در آن یک میدان دومدی با بسامدهای Ω_1 و Ω_2 با یک اتم سه ترازی نوع Λ در یک کاواک اپتیکی برهم‌کنش می‌کند. در این پیکربندی، گذارهای $|1\rangle \to |2\rangle$ و $|1\rangle \to |3\rangle$ مجاز هستند، در حالی که گذار $|2\rangle \to |3\rangle$ در تقریب دوقطبی الکتریکی ممنوع است [۴] (شکل ۱). هم‌چنین فرض می‌کنیم که اتم درون کاواک در حال حرکت، جفت‌شدگی اتم-میدان وابسته به شدت نور و گذارهای اتمی دوفوتونی هستند. هامیلتونی توصیف‌کننده‌ی سامانه‌ی اتم-میدان حاضر به صورت زیر است:

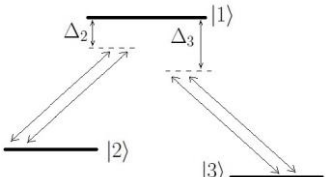
$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I \qquad (۱)$$

که در آن

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \hat{\sigma}_{jj} + \sum_{j=1}^{2} \Omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \qquad (۲)$$

و

$$\hat{H}_I = \lambda f_1(z) f_2(z)(\hat{R}_1 \hat{R}_2 \hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{21} \hat{R}_2^\dagger \hat{R}_1^\dagger) + \lambda f_1(z) f_2(z)(\hat{R}_1 \hat{R}_2 \hat{\sigma}_{13} + \hat{\sigma}_{31} \hat{R}_2^\dagger \hat{R}_1^\dagger) \qquad (۳)$$



شکل ۱: برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با یک میدان

در رابطه‌های بالا، $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ عملگر گذار اتمی است و λ_1 و λ_2 ثابت‌های جفت‌شدگی اتم-میدان هستند که بدون کاستن از کلّیت موضوع فرض می‌کنیم $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. عملگرهای $\hat{R}_i = \hat{a}_i g_i(\hat{n})$ و $\hat{R}_i^\dagger = g_i(\hat{n}) \hat{a}_i^\dagger$ با $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ به‌عنوان عملگر تعداد فوتون، به‌ترتیب عملگرهای نابودی و آفرینش تغییرشکل‌یافته هستند. با به کار بردن تابع عملگر-مقدار $g(\hat{n})$ برای توصیف جفت‌شدگی اتم-میدان وابسته به شدت، جبر نوسانگر هماهنگ استاندارد به جبر لی ویل-هایزنبرگِ تغییرشکل‌یافته تبدیل می‌شود [۵]. هم‌چنین، وارد کردن حرکت اتم در هامیلتونی، با توابع $f_1(z)$ و $f_2(z)$ انجام شده است. اگر تابع مُد میدان را بر اساس مُد TEM_{mnp} در نظر بگیریم، آن‌گاه این توابع به صورت

$$f_i(z) = \sin(p_i \pi v t / L) \qquad (۴)$$

خواهند بود که در آن v بیان‌گر سرعت حرکت اتم است و p_i نشان‌دهنده‌ی تعداد نصف طول‌موج‌های مد میدان درون کاواک به طول L است [۶]. فرض می‌کنیم سرعت حرکت اتم به صورت $v = \lambda L/\pi$ باشد، در نتیجه $f(vt) = \sin(p_i \lambda t)$. برای مقاصد بعدی، مناسب است هامیلتونی کل سامانه در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر بازنویسی شود:

$$V = \lambda f_1(z) f_2(z)\left(\hat{R}_1 \hat{R}_2 \hat{\sigma}_{12} e^{i\Delta_2 t} + \hat{\sigma}_{21} \hat{R}_2^\dagger \hat{R}_1^\dagger e^{-i\Delta_2 t}\right) + \lambda f_1(z) f_2(z)\left(\hat{R}_1 \hat{R}_2 \hat{\sigma}_{13} e^{i\Delta_3 t} + \hat{\sigma}_{21} \hat{R}_2^\dagger \hat{R}_1^\dagger e^{-i\Delta_3 t}\right) \qquad (۵)$$

که در آن Δ_2 و Δ_3 پارامترهای نامیزانی هستند و بنا به روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\Delta_2 = \omega_1 - \omega_2 - (\Omega_1 + \Omega_2),$$
$$\Delta_3 = \omega_1 - \omega_3 - (\Omega_1 + \Omega_2) \qquad (۶)$$

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]

حال برای یافتن شکل صریح بردارحالت سامانه از رهیافت عملگر تحول زمانی استفاده می‌کنیم. به این منظور، لازم است بردار حالت اولیه‌ی کل سامانه در شروع برهم‌کنش مشخص باشد. فرض می‌کنیم که اتم در حالت برانگیخته و میدان در حالت همدوس باشد، یعنی:

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} q_n q_m |1,n,m\rangle,$$
$$q_n = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}},\quad q_m = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}\frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} \qquad (۷)$$

که q_n و q_m دامنه‌های احتمال میدان تابشی اولیه را نشان می‌دهند. بنابراین، بردار حالت سامانه با اثر عملگر تحول زمانی روی تابع موج اولیه کل سامانه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} q_n q_m \left[A_{nm}(t)|1,n,m\rangle\right.$$
$$\left.+B_{nm}(t)|2,n+1,m+1\rangle + C_{nm}(t)|3,n+1,m+1\rangle\right] \qquad (۸)$$

که در آن ضرایب A_{nm}، B_{nm} و C_{nm}، که دامنه‌های احتمال اتمی هستند. با تعریف توابع Θ_i و Θ_{nm} به شکل

$$\Theta_i = \lambda\int_0^t f_1(vt')f_2(vt')e^{i\Delta_i t'}dt', \qquad i=2,3$$
$$\Theta_{nm} = \sqrt{(|\Theta_2|^2+|\Theta_3|^2)(n+1)(m+1)}\,g(n+1)g(m+1) \qquad (۹)$$

این ضرایب با روابط زیر داده می‌شوند:

$$A_{nm} = \cos\Theta_{nm},\quad B_{nm} = \frac{\Theta_2^*}{i\sqrt{|\Theta_2|^2+|\Theta_3|^2}}\sin\Theta_{nm},$$
$$C_{nm} = \frac{\Theta_3^*}{\Theta_2^*}B_{nm} \qquad (۱۰)$$

حال با داشتن شکل دقیق تابع موج سامانه، بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی شامل درهم‌تنیدگی کوانتومی بین زیرسامانه‌ها امکان‌پذیر می‌شود.

۳- درهم‌تنیدگی کوانتومی

نشان داده شده است که تحول زمانی آنتروپی اتم یا میدان معیاری از تحول زمانی میزان درهم‌تنیدگی بین اتم و میدان است، به گونه‌ای که آنتروپی بزرگتر به معنای درهم‌تنیدگی بیشتر بین دو زیرسامانه‌ی اتم و میدان است [۷]. در پژوهش حاضر، از رهیافت آنتروپی کاهش‌یافته‌ی فون‌نویمن استفاده می‌کنیم. بر این اساس، آنتروپی اتم (میدان) طبق عملگر چگالی کاهش‌یافته به صورت زیر تعریف می‌شود [۸و۹]:

$$S_{A(F)} = -Tr_{A(F)}[\hat{\rho}_{A(F)}(t)\ln\hat{\rho}_{A(F)}(t)] \qquad (۱۱)$$

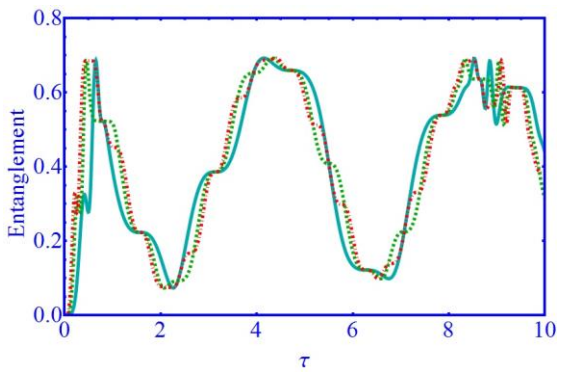
که در آن $\hat{\rho}_A$ و $\hat{\rho}_F$ به ترتیب ماتریس‌های چگالی کاهش‌یافته‌ی اتم و میدان هستند. پیش از پرداختن به محاسبه‌ی آنتروپی میدان (اتم)، لازم است که به قضیه مهم آراکی- لیب اشاره کنیم [۱۰]. برطبق این قضیه، برای سامانه‌های کوانتومی دو جزئی (در این‌جا اتم و میدان)، آنتروپی کل سامانه با آنتروپی زیرسامانه‌ها با نامساوی زیر در ارتباط است:

$$|S_A(t)-S_F(t)| \le S(t) \le S_A(t)+S_F(t) \qquad (۱۲)$$

که در آن، $S_{A(F)}$ بیانگر آنتروپی اتم(میدان) است و آنتروپی کل سامانه‌ی اتم-میدان با S نشان داده شده است. بر طبق این نامساوی، اگر در لحظه‌ی اولیه، حالت‌های اتم و میدان در حالت خالص و مستقل از یکدیگر باشند، آنتروپی کل سامانه صفر خواهد بود و ثابت باقی می‌ماند. پس، با آماده‌سازی حالت‌های اتم و میدان در لحظه‌ی اولیه به‌صورت مستقل از هم، برای هر زمان $t>0$، آنتروپی میدان با آنتروپی اتم برابر است. از این‌رو، به‌جای تحول آنتروپی میدان، رفتار زمانی آنتروپی اتم را به‌عنوان معیار درهم‌تنیدگی زیرسامانه‌ها درنظر می‌گیریم. برای سامانه‌ی برهم‌کنشی حاضر، آنتروپی کاهش‌یافته‌ی اتم و میدان به شکل زیر ساده می‌شود [۱۱]:

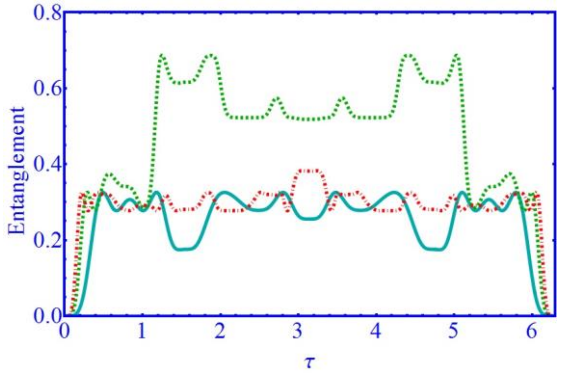
$$S_A(t) = S_F(t) = -\sum_{j=1}^{3}\zeta_j\ln\zeta_j \qquad (۱۳)$$

که در آن ζ_j ویژه‌مقادیر عملگر ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی اتمی هستند. با توجه به رابطه‌ی (۱۳) می‌توان تغییرات زمانی آنتروپی اتم (میدان) را تعیین نمود که بیان‌گر میزان درهم‌تنیدگی بین اتم و میدان است. هم‌چنین، رابطه‌ی (۱۳) نشان می‌دهد که اگر آنتروپی اتم صفر شود، زیرسامانه‌ها جداپذیر هستند.

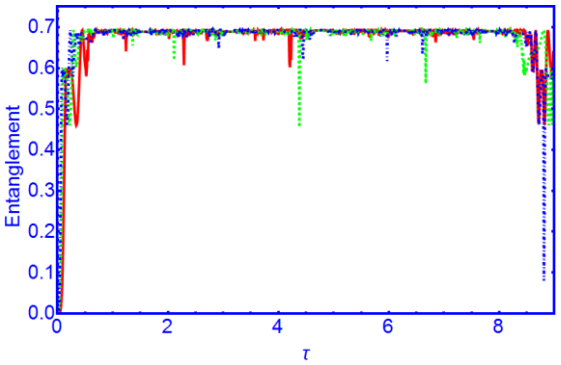


شکل ۲: تحول زمانی آنتروپی میدان در حالت تشدید و در رژیم جفت‌شدگی ثابت به ازای $p_1 = p_2 = 2$ (خط‌پیوسته)، $p_1 = p_2 = 4$ (خط‌چین) و $p_1 = p_2 = 6$ (نقطه- خط‌چین).

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]



شکل ۳: تحول زمانی آنتروپی میدان در حالت غیرتشدیدی و در رژیم جفت‌شدگی ثابت به ازای $p_1 = p_2 = 2$ (خط‌پیوسته)، $p_1 = p_2 = 4$ (خط‌چین) و $p_1 = p_2 = 6$ (نقطه- خط‌چین).



شکل ۴: تحول زمانی آنتروپی میدان در حالت تشدید و با تابع وابسته به شدّت $g(n) = \sqrt{n}, g(m) = \sqrt{m}$ به ازای $p_1 = p_2 = 2$ (خط‌پیوسته)، $p_1 = p_2 = 4$ (خط‌چین) و $p_1 = p_2 = 6$ (نقطه- خط‌چین).

شکل‌های ۲ تا ۴ تحول زمانی آنتروپی میدان را برحسب زمان مشخصه‌ی $\tau = \lambda t$ برای تعداد میانگین فوتون اولیه‌ی $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 10$ نشان می‌دهند. در این نمودارها تأثیر پارامترهای نامیزانی، حرکت اتم و جفت‌شدگی وابسته به شدّت بر درهم‌تنیدگی بین اتم و میدان مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۲ نشان می‌دهد که رفتار زمانی آنتروپی میدان برای سرعت‌های متفاوت از اتم تقریباً با یکدیگر برابر است. حال آن‌که این مسأله به ازای $\Delta_2 = 7$ و $\Delta_3 = 15$ کاملاً متفاوت است. شکل ۳ نشان می‌دهد که در حالت غیرتشدیدی، رفتار زمانی آنتروپی میدان منظم و نوسانی خواهد بود. با مقایسه‌ی شکل ۳ با شکل ۲، می‌توان گفت که پارامترهای نامیزانی آنتروپی میدان را کاهش می‌دهند اگرچه این مقدار با تغییر پارامترهای نامیزانی به‌طور قابل‌توجّهی افزایش می‌یابد. شکل ۴ که به بررسی اثر جفت‌شدگی وابسته به شدّت می‌پردازد نشان می‌دهد که این اثر می‌تواند میانگین میزان درهم‌تنیدگی در بازه‌های یکسان زمانی و بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی را افزایش دهد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از مدل جینز-کامینگز تعمیم‌یافته، برهم‌کنش غیرخطّی یک اتم سه‌ترازی در حال حرکت نوع Λ با یک میدان دومدی با گذارهای دوفوتونی مورد بررسی قرار گرفت. به یک معنا، در فرمول‌بندی ارائه‌شده ثابت جفت‌شدگی اتم-میدان به شدت نور و سرعت حرکت اتم وابسته شده است. شکل‌های حاصل از نتایج عددی نشان دادند که پارامترهای نامیزانی درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه‌ها را کاهش می‌دهند. در حالت تشدید، حرکت اتم تأثیری روی آنتروپی ندارد ولی در حالت غیرتشدیدی افزایش پارامتر ساختار مد میدان میزان درهم‌تنیدگی را بهبود می‌بخشد و از این پارامتر می‌توان به عنوان یک پارامتر قابل تنظیم در درهم‌تنیدگی بین اتم و میدان استفاده کرد. هم‌چنین، جفت‌شدگی وابسته به شدّت می‌تواند بیشینه‌ی درهم‌تنیدگی را بهبود بخشد.

مراجع

[1] Nielsen M.A. and Chuang I.L. "*Quantum computation and Quantum Information*" Cambridge: Cambridge University Press, (2000).

[2] Jaynes E.T. and Cummings F.W. "*Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*" **Proc. IEEE**. 51 (1963) 89.

[3] Rempe G., Walther H. and Klein N. "*Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser*" **Phys. Rev. Lett.** 58 (1987) 353.

[4] Scully M.O. and Zubairy M.S. "*Quantum Optics*", Cambridge: Cambridge University Press, (1997).

[5] De Matos R.L. and Vogel W. "*Nonlinear coherent states*" **Phys. Rev. A** 54 (1996) 4560.

[6] Schlicher R.R. "*Jaynes-Cummings model with atomic motion*" **Opt. Commun** 70 (1989) 97.

[7] Faghihi M.J. and Tavassoly M.K. "*Dynamics of entropy and nonclassical properties of the state of a Lambda-type three-level atom interacting with a single-mode cavity field with intensity-dependent coupling in a Kerr medium*" **J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.** 45 (2012) 035502.

[8] Phoenix S.J.D. and Knight P.L. "*Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes-Cummings model*" **Phys. Rev. A** 44 (1991) 6023.

[9] Mahjoei M., Golshan M.M. and Safari H. "*Collapse revival behaviour of the entanglement between V-type three-level atoms and two-mode photons in nonlinear Jaynes–Cummings model*" **Pramana - J. Phys.** 80 (2013) 785.

[10] Araki M. and Leib E. "*Entropy inequalities*" **Commun. Math. Phys.** 18 (1970) 160.

[11] Faghihi M.J. and Tavassoly M.K. "*Quantum entanglement and position-momentum entropic squeezing of a moving Lambda-type three-level atom interacting with a single-mode quantized field with intensity-dependent coupling*" **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.** 46 (2013) 145506.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]