بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
خوزستان، ایران.
۱۲-۱۴ بهمن ۱۴۰۰

اثر برهم‌کنش دوقطبی- دوقطبی بر دینامیک درهم‌تنیدگی در یک سامانه سه اتمی

شهربانو اکبری، محمدکاظم توسلی، مهناز قاسمی

گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

shakbari9574@gmail.com, mktavassoly@yazd.ac.ir, m.ghasemi@stu.yazd.ac.ir

چکیده- در این مقاله، درهم‌تنیدگی تولید شده به واسطه برقراری برهم‌کنش اتم- میدان در یک کاواک تک‌مد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سه اتم دوترازی (مدل تاویز-کامینگز) در یک کاواک تک‌مد در حال برهم‌کنش با میدان هستند. با در نظر گرفتن برهم‌کنش دوقطبی- دوقطبی بین هر جفت اتم، تحول سامانه مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در نهایت، درهم‌تنیدگی جفت‌های اتمی و نیز درهم‌تنیدگی یک اتم با دو اتم دیگر با سنجه تلاقی محاسبه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که با تنظیم پارامترها می‌توان به بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی دست یافت. هم‌چنین، مقادیر درهم‌تنیدگی ایجاد شده بعد از برهم‌کنش، حتی با انتخاب حالت اولیه جداپذیر برای اتم‌ها، قابل قبول است.

کلید واژه- برهم‌کنش اتم- میدان، تلاقی، درهم‌تنیدگی، مدل تاویز- کامینگز.

The influence of dipole-dipole interaction on the entanglement dynamics in a three-atom system

Shahrbanoo Akbari, Mohammad Kazem Tavassoly, Mahnaz Ghasemi

Optics and Laser Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract- In this paper, we investigate the produced entanglement by performing atom-field interaction in a single-mode cavity. Three two-level atoms (Tavis-Cummings model) are interacting with the field in a single-mode cavity. By considering dipole-dipole interaction between each pair of atoms, evolution of the system is studied. Finally, the entanglement of atomic pairs as well as the entanglement of one atom with the other two atoms are calculated via concurrence measure. The results show that the maximum of entanglement is achieved with appropriate choices of the involved parameters. Also, the amounts of produced entanglement after the interaction are acceptable even with selecting the separable initial state for atoms.

Keywords: Atom-field interaction, Concurrence, Entanglement, Tavis-Cummings model.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-07]

مقدمه

به دلیل اهمیت درهم‌تنیدگی در پردازش اطلاعات کوانتومی، محاسبات کوانتومی و هم‌چنین نقش کلیدی آن در فناوری‌های کوانتومی [۱]، مطالعه و بررسی این پدیده بسیار مورد توجه است. درهم‌تنیدگی بین اجزاء یک سامانه می‌تواند با ایجاد برهم‌کنش بین اجزای آن برقرار شود [۲]. هم‌چنین، این ویژگی با استفاده از شکافنده پرتو نیز قابل تولید است [۳]. در حقیقت، وجود درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه‌های یک سامانه منجر به جداناپذیری حالت‌های زیرسامانه‌ها از یکدیگر می‌شود. مدل جینز- کامینگز یکی از مدل‌های معتبر برای توصیف برهم‌کنش اتم با میدان کوانتومی است [۴]. این مدل قابل گسترش است و می‌توان با افزایش تعداد اتم‌ها (مدل تاویز- کامینگز) و در نظر گرفتن برهم‌کنش دوقطبی- دوقطبی بین اتم‌ها، تحولات سامانه را مورد مطالعه و بررسی قرار داد. وجود برهم‌کنش توصیف شده با مدل جینز-کامینگز یا تاویز-کامینگز منجر به ایجاد درهم‌تنیدگی می‌شود که می‌توان آن را با سنجه تلاقی مورد بررسی قرار داد [۵].

مدل سامانه و روابط پایه

سامانه مورد مطالعه متشکل از سه اتم دوترازی A، B و C است که این سه اتم با یک میدان تک‌مد کوانتومی در یک کاواک در حال برهم‌کنش هستند. گاهی این مدل به مدل تاویز- کامینگز شناخته می‌شود [۶]. این برهم‌کنش با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{H} = \nu \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \sum_{k=A,B,C} [\frac{\omega_k}{2}\hat{\sigma}_k^z + g_k(\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_k^- + \hat{a}\hat{\sigma}_k^+)], \qquad (۱)$$

که مجموع دو جمله اول هامیلتونی (۱) به عنوان بخش غیربرهم‌کنشی هامیلتونی، $\hat{H}_0$ نام دارد که جملات اول و دوم آن به ترتیب هامیلتونی‌های آزاد میدان و اتم است. جمله آخر نیز به واسطه برهم‌کنش اتم- میدان وارد شده است که بخش برهم‌کنشی هامیلتونی است ($\hat{H}_1$). در هامیلتونی (۱)، ν و ω_k به ترتیب نشان دهنده بسامد میدان تک‌مد و بسامد گذار اتمی اتم k-ام است. هم‌چنین، g_k ثابت جفت‌شدگی اتم- میدان بین اتم k-ام و میدان را مشخص می‌کند. $\hat{a}^{\dagger}$ ($\hat{a}$) عملگر آفرینش (نابودی) میدان و عملگرهای σ_k^+, σ_k^- و σ_k^z به ترتیب عملگرهای پایین آورنده، بالابرنده و وارونی جمعیت اتمی اتم k-ام هستند که به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{\sigma}_k^- = |g\rangle_k \langle e|, \qquad \hat{\sigma}_k^+ = |e\rangle_k \langle g|, \qquad (۲)$$
$$\hat{\sigma}_k^z = |e\rangle_k \langle e| - |g\rangle_k \langle g|,$$

در اینجا حالت‌های $|e\rangle_k$ و $|g\rangle_k$ به ترتیب نشان دهنده تراز برانگیخته و پایه اتم k-ام است. حالت اولیه اتم‌ها به صورت کلی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$|\phi\rangle_{ABC} = (\cos\alpha|egg\rangle + \sin\alpha|gee\rangle)_{ABC}. \qquad (۳)$$

هم‌چنین، حالت اولیه میدان نیز خلاء است. با اضافه کردن جملات مربوط به برهم‌کنش دوقطبی- دوقطبی با ثابت‌های جفت‌شدگی k_A, k_B و k_C به هامیلتونی (۱) داریم:

$$\hat{H}' = \nu \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \sum_{k=A,B,C} [\frac{\omega_k}{2}\hat{\sigma}_k^z + g_k(\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_k^- + \hat{a}\hat{\sigma}_k^+)]$$
$$+k_A(\hat{\sigma}_A^+\hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_A^-\hat{\sigma}_B^+) + k_B(\hat{\sigma}_B^+\hat{\sigma}_C^- + \hat{\sigma}_B^-\hat{\sigma}_C^+)$$
$$+k_C(\hat{\sigma}_A^+\hat{\sigma}_C^- + \hat{\sigma}_A^-\hat{\sigma}_C^+). \qquad (۴)$$

با این هامیلتونی، دست‌یابی به شکل صریح بردار حالت سامانه بعد از برهم‌کنش امکان‌پذیر نشد. بنابراین، برای حل مشکل، به محاسبه هامیلتونی مؤثر با کمک هامیلتونی (۱) و مطابق رهیافت مطرح شده در مرجع [۷] می‌پردازیم. برای محاسبه هامیلتونی مؤثر در ابتدا باید هامیلتونی (۱) در تصویر برهم‌کنش به دست آید. با استفاده از لم بیکر- هاسدورف، هامیلتونی (۱) در تصویر برهم‌کنش به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \sum_{k=A,B,C} g_k \hat{a}\hat{\sigma}_k^+ e^{it(\omega_k - \nu)} + g_k \hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_k^- e^{-it(\omega_k - \nu)}. \qquad (۵)$$

مطابق با رهیافت مرجع [۷]، برای هامیلتونی به شکل زیر:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \sum_{n=1}^{N} \hat{h}_n \exp(-i\omega_n t) + \hat{h}_n^{\dagger} \exp(i\omega_n t), \qquad (۶)$$

هامیلتونی مؤثر متناظر از رابطه زیر قابل محاسبه است:

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-07]

$$\hat{H}_{eff}(t) = \hat{H}_0 + \sum_{n,m=1}^{N} \frac{1}{\hbar\omega_{nm}}[\hat{h}_m^{\dagger}, \hat{h}_n]\exp(i(\omega_m - \omega_n)t), \quad (۷)$$

که در آن $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_n}+\frac{1}{\omega_m}\right)=\frac{1}{\omega_{nm}}$ است. با طی کردن مسیر بیان شده در مرجع [۷]، برای محاسبه هامیلتونی مؤثر مرتبط با مقاله حاضر و با اعمال شرایط قابل دست‌یابی $\omega_A=\omega_B=\omega_C=\omega$ و $g_k=g$، نهایتا هامیلتونی مؤثر متناظر با مدل برهم‌کنشی که ما در نظر گرفتیم، در شرایط تشدید ($\omega=\nu$) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{eff} &= -\frac{g^2}{\omega}[\hat{a}^{\dagger}\hat{a}(\hat{\sigma}_A^Z+\hat{\sigma}_B^Z+\hat{\sigma}_C^Z)\\ &+\hat{\sigma}_A^+\hat{\sigma}_A^- + \hat{\sigma}_B^+\hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_C^+\hat{\sigma}_C^- + \hat{\sigma}_A^+\hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_B^+\hat{\sigma}_A^-\\ &+\hat{\sigma}_B^+\hat{\sigma}_C^- + \hat{\sigma}_C^+\hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_C^+\hat{\sigma}_A^- + \hat{\sigma}_A^+\hat{\sigma}_C^-].\end{aligned} \quad (۸)$$

با در نظر گرفتن حالت خلاء برای میدان اولیه، سه جمله شامل $(\hat{a}^{\dagger}\hat{a})$ از هامیلتونی مؤثر (۸) حذف می‌شود. با استفاده از هامیلتونی به دست آمده بعد از حذف جملات میدان و با توجه به حالت اولیه (۳)، حالت درهم‌تنیده مربوط به سه اتم بعد از برهم‌کنش، به کمک معادله وابسته به زمان شرودینگر $\left(i\frac{\partial|\phi(t)\rangle_{ABC}}{\partial t}=\hat{H}_{eff}|\phi(t)\rangle_{ABC}\right)$ به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}|\phi(t)\rangle_{ABC} &= \big(C_1(t)|egg\rangle + C_2(t)|gge\rangle + C_3(t)|geg\rangle\\ &+C_4(t)|ege\rangle + C_5(t)|eeg\rangle + C_6(t)|gee\rangle\big)_{ABC},\end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن ضرایب بالا پس از حل معادله شرودینگر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}C_1(t) &= \frac{1}{3}[2+\exp(\frac{3ig^2t}{\omega})]\cos\alpha,\\ C_2(t)=C_3(t) &= \frac{1}{3}[-1+\exp(\frac{3ig^2t}{\omega})]\cos\alpha,\\ C_4(t)=C_5(t) &= \frac{1}{3}\exp(\frac{ig^2t}{\omega})[-1+\exp(\frac{3ig^2t}{\omega})]\sin\alpha,\\ C_6(t) &= \frac{1}{3}\exp(\frac{ig^2t}{\omega})[2+\exp(\frac{3ig^2t}{\omega})]\sin\alpha.\end{aligned} \quad (۱۰)$$

حال به منظور محاسبه درهم‌تنیدگی با استفاده از سنجه تلاقی، ماتریس چگالی حالت (۹) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho_{ABC}(t) = |\phi(t)\rangle_{ABC}\langle\phi(t)|. \quad (۱۱)$$

برای محاسبه درهم‌تنیدگی بین اتم‌های (A, B) و (A, C) ماتریس چگالی کاهش یافته مربوط به جفت‌های اتمی بیان شده به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho_{AB}(t) = \langle e_C|\rho_{ABC}(t)|e_C\rangle + \langle g_C|\rho_{ABC}(t)|g_C\rangle, \quad (۱۲)$$

$$\rho_{AC}(t) = \langle e_B|\rho_{ABC}(t)|e_B\rangle + \langle g_B|\rho_{ABC}(t)|g_B\rangle. \quad (۱۳)$$

به منظور محاسبه درهم‌تنیدگی بین دو اتم دوترازی با توجه به تعریف تلاقی به صورت زیر [۵]:

$$C(t) = Max\{0, \sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_3}-\sqrt{\lambda_4}\}, \quad (۱۴)$$

که در آن λ_i $(i=1,2,3,4)$، ویژه‌مقادیر به ترتیب نزولی ماتریس چگالی $R=(\hat{\sigma}_y\otimes\hat{\sigma}_y).\rho^*.(\hat{\sigma}_y\otimes\hat{\sigma}_y)$ است (در R، $\hat{\sigma}_y$ ماتریس پائولی و ρ^* همیوغ مختلط ماتریس چگالی اتمی است)، تلاقی مربوط به جفت‌های (A, B) و (A, C) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_{AB}(t) = Max\{0, \sqrt{\lambda_1^{AB}}-\sqrt{\lambda_2^{AB}}\}, \quad (۱۵)$$

$$C_{AC}(t) = Max\{0, \sqrt{\lambda_1^{AC}}-\sqrt{\lambda_2^{AC}}\},$$

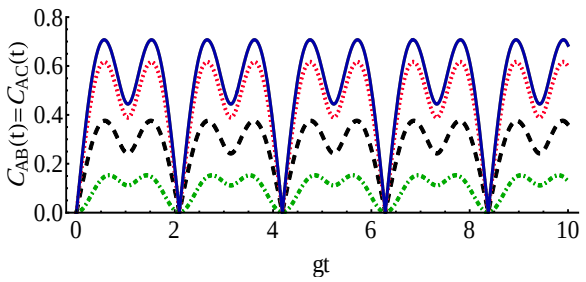
که در این رابطه $(\lambda_2^{AB},\lambda_1^{AB})$ و $(\lambda_2^{AC},\lambda_1^{AC})$ به ترتیب ویژه‌مقادیر غیرصفر ماتریس‌های چگالی کاهش یافته $\rho_{AB}(t)$ و $\rho_{AC}(t)$ است که در روابط (۱۲) و (۱۳) مشخص شده‌اند. هم‌چنین، به کمک روابط تلاقی در (۱۵) و با استفاده از رابطه زیر [۵]:

$$C_{A(BC)}(t) = \sqrt{C_{AB}^2(t)+C_{AC}^2(t)+2(\sqrt{\lambda_1^{AB}\lambda_2^{AB}}-\sqrt{\lambda_1^{AC}\lambda_2^{AC}})}, \quad (۱۶)$$

می‌توان درهم‌تنیدگی بین اتم A با مجموعه (B, C) را نیز به دست آورد.

تجزیه و تحلیل عددی نتایج

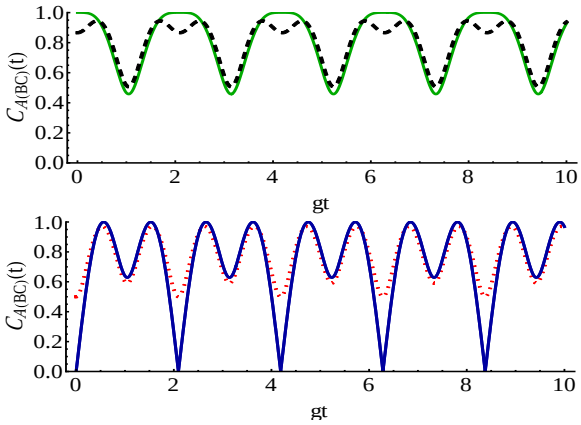
در شکل ۱، تاثیر شرایط اولیه (با تغییر α در رابطه (۳)) بر درهم‌تنیدگی جفت‌های (A, B) و (A, C) مطابق رابطه (۱۵) بررسی می‌شود. در رابطه (۱۵)، تلاقی $C_{AB}(t)$ برابر با $C_{AC}(t)$ است. در این شکل، تمام نمودارها با نمودار نقطه‌خط سبزرنگ مقایسه می‌شوند.



شکل ۱: نمودار تغییرات درهم‌تنیدگی جفت‌های (A, B) و (A, C) طبق رابطه (۱۵) بر حسب زمان مقیاس‌بندی شده gt برای $\omega=g$، $\alpha=\pi/4$ (نقطه‌خط سبز)، $\alpha=\pi/6$ (خط‌چین مشکی)، $\alpha=\pi/12$ (نقطه‌چین قرمز)، $\alpha=0$ و $\alpha=\pi/2$ (خط پیوسته آبی).

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-07]

در نمودار خط‌چین مشکی با انتخاب شرط اولیه اتمی $\alpha=\pi/6$ در مقایسه با نمودار نقطه‌خط سبزرنگ مقدار درهم‌تنیدگی افزایش یافته است. در نمودار نقطه‌چین قرمز با انتخاب $\alpha=\pi/12$ میزان درهم‌تنیدگی در مقایسه با دو نمودار قبلی افزایش یافته است. هم‌چنین، نمودار پیوسته آبی‌رنگ مربوط به $\alpha=0$ و $\alpha=\pi/2$ است (نمودار برای این دو مقدار بر هم منطبق است) یعنی با توجه به رابطه (۳) نمودار برای شرایطی رسم شده که حالت اولیه اتم‌ها جداپذیر است. این نمودار، تولید درهم‌تنیدگی را به واسطه برهم‌کنش نشان می‌دهد که میزان درهم‌تنیدگی در مقایسه با نمودارهای قبلی افزایش یافته است.



شکل ۲: نمودار تغییرات درهم‌تنیدگی بین اتم A با مجموعه (B, C) طبق رابطه (۱۶) بر حسب زمان مقیاس‌بندی شده gt برای $\omega=g$. نمودار بالا: $\alpha=\pi/4$ (خط پیوسته سبز)، $\alpha=\pi/6$ (خط‌چین مشکی). نمودار پایین: $\alpha=\pi/12$ (نقطه‌چین قرمز)، $\alpha=\pi/2$ و $\alpha=0$ (خط پیوسته آبی).

در شکل ۲ (بالا و پایین) تاثیر حالت اولیه (۳) بر درهم‌تنیدگی بین اتم A با مجموعه (B, C) مطابق رابطه (۱۶) مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۲ (بالا)، درهم‌تنیدگی در نمودار پیوسته سبزرنگ با انتخاب $\alpha=\pi/4$ در بازه‌هایی از زمان به بیشترین مقدار رسیده، اما در نمودار خط‌چین مشکی با انتخاب $\alpha=\pi/6$ فروافتی در این بازه‌های زمانی رخ داده است. در شکل ۲ (پایین)، از نمودار نقطه‌چین قرمز مشاهده می‌شود که با انتخاب $\alpha=\pi/12$ فروافت درهم‌تنیدگی به میزان قابل ملاحظه‌ای در مقایسه با نمودار خط‌چین مشکی (در شکل ۲) افزایش یافته است. در نمودار پیوسته آبی، با انتخاب $\alpha=\pi/2$ و $\alpha=0$ (با انتخاب حالت اولیه جداپذیر برای اتم‌ها) کمینه تلاقی به صفر رسیده (مرگ درهم‌تنیدگی) اما بلافاصله بعد از آن احیای درهم‌تنیدگی مشاهده می‌شود. نمودار برای دو مقدار ذکر شده بر هم منطبق است. در نمودارهای شکل ۱ و ۲ رفتار تلاقی نوسانی است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، تاثیر برهم‌کنش دوقطبی- دوقطبی بر درهم‌تنیدگی در یک سامانه برهم‌کنشی اتم- میدان مورد مطالعه قرار گرفت. در ابتدا، سه اتم در حال برهم‌کنش با میدان تک‌مد کوانتومی در یک کاواک مشترک در حضور برهم‌کنش دوقطبی- دوقطبی در نظر گرفته شد. در نهایت، سنجه تلاقی به منظور محاسبه درهم‌تنیدگی بین جفت‌های اتمی و هم‌چنین درهم‌تنیدگی بین یک اتم با دو اتم دیگر مورد بررسی قرار گرفت. تاثیر تغییر شرایط اولیه بر تلاقی‌ها مورد مطالعه قرار گرفت و مشاهده شد که در شرایطی، بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی قابل حصول است. هم‌چنین، با انتخاب حالت اولیه جداپذیر برای سه اتم، بعد از ایجاد برهم‌کنش بین اتم‌ها و محاسبه تلاقی، مقادیر قابل قبولی برای درهم‌تنیدگی به دست آمد که در بسیاری از موارد، بویژه در مورد تلاقی جفت‌های اتمی، شاهد مرگ لحظه‌ای درهم‌تنیدگی و سپس احیای آن بودیم.

مرجع‌ها

[1] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, “Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels”, Phys. Rev. Lett., Vol. 70, No. 13, p. 1895, 1993.

[2] X. B. Zou, K. Pahlke, W. Mathis, “Generation of entangled states of two three-level atoms in cavity QED”, Phys. Rev. A, Vol. 67, No. 4, p. 044301, 2003.

[3] C. N. Gagatsos, O. Oreshkov, N. J. Cerf, “Majorization relations and entanglement generation in a beam splitter”, Phys. Rev. A, Vol. 87, No. 4, p. 042307, 2013.

[4] Ch. Gerry, Peter L. Knight, *Introductory quantum optics*, Cambridge university press, 2005.

[5] V. Coffman, J. Kundu, W. K. Wootters, “Distributed entanglement”, Phys. Rev. A, Vol. 61, No. 5, p. 052306, 2000.

[6] M. Tavis, F. W. Cummings, “Exact solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian”, Phys. Rev., Vol. 170, No. 2, p. 379, 1968.

[7] D. F. James, J. Jerke, “Effective Hamiltonian Theory and Its Applications in Quantum Information”, Can. J. Phys., Vol. 85, No. 6, pp. 625-632, 2007.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-07]