بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
خوزستان، ایران.
۱۲-۱۴ بهمن ۱۴۰۰

کنترل خواص غیرکلاسیکی در یک سامانه‌ی اپتیک غیرخطی کِر دو مدی با استفاده از رهیافت حالت‌های همدوس غیرخطی

مژگان مومنی دمنه[۱]، علی مهدی‌فر[۲]، رسول رکنی زاده[۳]

گروه فیزیک-دانشکده فیزیک-دانشگاه اصفهان

[1]mojganmomeni@outlook.com, [2]a.mahdifar@sci.ui.ac.ir, [3]rokni@sci.ui.ac.ir

چکیده - یکی از فرآیندهای مربوط به اپتیک غیرخطی که سبب غیرخطیت $\chi^{(3)}$ می‌گردد، وابستگی ضریب شکست ماده به شدت نور فرودی است. در این مقاله، این فرآیند را با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی توصیف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که سامانه‌ی اپتیک غیرخطی مزبور را می‌توان با جبر یک نوسانگر دو بعدی تغییر شکل یافته توصیف کرد. سپس، ضمن تعریف حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با سامانه‌ی اپتیک غیرخطی، خواص غیرکلاسیکی آن را بررسی می‌کنیم. سرانجام، نشان می‌دهیم با تغییر مولفه‌های غیرخطی سامانه‌ی اپتیکی می‌توان خواص غیرکلاسیکی در سامانه را کنترل کرد.

کلید واژه- حالت همدوس غیرخطی، جبر نوسانگر تغییر شکل یافته، سامانه‌ی اپتیک غیرخطی.

Control of the nonclassical properties of the two-mode Kerr nonlinear optical system based on the nonlinear coherent states approach

Mojgan Momeni-Demneh[1], Ali Mahdifar[2] and Rasoul Roknizadeh[3]

Physics Group, Physics Department, University of Isfahan

[1]mojganmomeni@outlook.com, [2]a.mahdifar@sci.ui.ac.ir, [3]rokni@sci.ui.ac.ir

Abstract- One of the nonlinear optical phenomena which arise out of a $\chi^{(3)}$ nonlinearity, is the intensity dependent of the refractive index. In this paper, we describe this phenomenon based on the nonlinear coherent states approach. We have shown that the deformed two-dimensional oscillator algebra can be used to describe this nonlinear optical system. Then, we construct the nonlinear coherent states for this nonlinear optical system and study their quantum statistical properties. Finally, we find that by changing nonlinearity of the media, it is possible to control the nonclassical properties of the system.

Keywords: Deformed oscillator algebra, Nonlinear coherent state, Nonlinear optical system.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-02]

مقدمه

مطالعه و تبیین اثرات یک محیط غیرخطی بر بروندادهای تجربی از جمله مسائلی است که از دیرباز در کانون توجه فیزیکدانان قرار گرفته است. اپتیک غیرخطی از جمله عرصه‌هایی است که برای بررسی این اثرات غیرخطی بر نتایج تجربی به کار گرفته می‌شود.

از طرف دیگر، حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ و تعمیم‌های آن دارای نقش بسیار مهمی در بسیاری از بخش‌های فیزیک هستند. از میان حالت‌های همدوس تعمیم یافته، حالت‌های همدوس غیرخطی [۱] به دلیل دارا بودن ویژگی‌های غیرکلاسیکی بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند [۲]. علاوه بر این، حالت‌های همدوس غیرخطی توانسته‌اند جنبه‌های غیرخطی بعضی از پدیده‌های کوانتومی همچون اثر اپتیکی کر [۳] را توصیف نمایند.

یکی از موضوعات جالب توجه، بررسی اثرات محیط غیرخطی بر نتایج آزمایش‌های اپتیکی در چارچوب فرمولبندی حالت‌های همدوس است. حالت‌های همدوس که تشکیل یک مجموعه ابرکامل می‌دهند، چنانچه برای یک سامانه اپتیک غیرخطی تعریف شوند، دارای اثرات غیرخطی خواهند بود.

هدف ما در این مقاله توصیف سامانه اپتیک غیرخطی کِر دو مدی با استفاده از رهیافت حالت‌های همدوس غیرخطی و بررسی خواص غیرکلاسیکی آن است. بدین منظور، با استفاده از جبر نوسانگر تغییر شکل یافته، و یافتن تابع تغییر شکل مربوط، حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با این سامانه‌ی غیرخطی را بدست می‌آوریم و در ادامه خواص غیرکلاسیکی آن‌ها را بررسی خواهیم کرد.

حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با سامانه‌ی غیرخطی

یکی از مهم‌ترین فرآیندهای اپتیک غیرخطی که سبب غیرخطیت $\chi^{(3)}$ می‌گردد، وابستگی ضریب شکست ماده به شدت نور فرودی است. در این‌گونه مواد غیرخطی، ضریب شکست دارای یک جمله‌ی ثابت به علاوه یک جمله‌ی متناسب با شدت نور فرودی است. سامانه‌ی غیرخطی مزبور در برهمکنش با یک میدان کوانتومی دومدی با هامیلتونی کوانتومی زیر توصیف می‌شود که در آن تنها جملات غیرخطی کِر مربوط به خود جفت شدگی مدی در نظر گرفته شده‌اند:

$$\hat{H} = \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar\chi_a \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + \hbar\chi_b \hat{b}^{\dagger 2}\hat{b}^2, \quad (۱)$$

و در آن $\hat{a}$ $(\hat{a}^\dagger)$ و $\hat{b}$ $(\hat{b}^\dagger)$ عملگرهای نابودی (خلق) مدهای اول و دوم میدان فرودی هستند ، χ_a و χ_b با ضریب غیرخطی مرتبه‌ی سوم $\chi^{(3)}$ متناسب هستند [۴].

با مقایسه ویژه مقادیر سامانه‌ی مزبور با ویژه مقادیر یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی تغییر شکل یافته به شکل زیر:

$$\begin{aligned} &\hat{H} = \hbar\omega_a \hat{A}^\dagger \hat{A} + \hbar\omega_b \hat{B}^\dagger \hat{B}, \\ &\hat{A} = \hat{a} f_a(\hat{n}), \quad \hat{B} = \hat{b} f_b(\hat{n}), \end{aligned} \quad (۲)$$

توابع تغییر شکل یافته‌ی متناظر با سامانه‌ی اپتیک غیرخطی مورد نظر به صورت زیر بدست می‌آیند [۵]:

$$\hat{f}_i(\chi_i, \hat{n}_i) = \sqrt{1 + \frac{\chi_i}{\omega_i}(\hat{n}_i - 1)}, \quad i = a, b. \quad (۳)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود این تابع‌ها، با ضرایب غیرخطی χ_a و χ_b، با بسامدهای ω_a و ω_b و تعداد فوتون-های مد اول و دوم $\hat{n}_a$ و $\hat{n}_b$ متناسب است و می‌توان با کنترل این ضرایب خواص غیرکلاسیکی سامانه را کنترل کرد.

در ادامه با توصیف سامانه‌ی مورد نظر با استفاده از مدل شوینگر تعمیم یافته [۶]، حالت‌های همدوس دومدی متناظر با این سامانه‌ی اپتیک غیرخطی را بدست می‌آوریم.

با تعریف عملگرهای شوینگری تغییر شکل یافته‌ی زیر

$$\begin{aligned} &\hat{J}_+^{(\kappa)} = \hat{A}^\dagger \hat{B} = \hat{f}_a(\chi_a, \hat{n}_a)\hat{a}^\dagger \hat{b} \hat{f}_b(\chi_b, \hat{n}_b), \\ &\hat{J}_-^{(\kappa)} = \hat{B}^\dagger \hat{A} = \hat{f}_b(\chi_b, \hat{n}_b)\hat{b}^\dagger \hat{a} \hat{f}_a(\chi_a, \hat{n}_a), \\ &\hat{J}_0^{(\kappa)} = \frac{1}{2}(\hat{n}_a - \hat{n}_b), \end{aligned} \quad (۴)$$

به جبر تغییر شکل یافته‌ی $su_\kappa(2)$ زیر برای توصیف سامانه اپتیک غیرخطی می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &\left[\hat{J}_0^{(\kappa)}, \hat{J}_\pm^{(\kappa)}\right] = \pm \hat{J}_\pm^{(\kappa)}, \\ &\left[\hat{J}_+^{(\kappa)}, \hat{J}_-^{(\kappa)}\right] = 2\hat{J}_0^{(\kappa)} + O(\kappa). \end{aligned} \quad (۵)$$

آشکار است که در حد $\chi_a \to 0$ و $\chi_b \to 0$، جبر

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-02]

$su_\kappa(2)$ی بالا به جبر استاندارد تبدیل می‌شود. همانگونه که از روابط (۴) مشاهده می‌شود، داریم:

$$\hat{J}_-^{(\kappa)}|0,N\rangle=0,\qquad \hat{J}_+^{(\kappa)}|N,0\rangle=0. \tag{۶}$$

رابطه اول نشان می‌دهد که $|0,N\rangle\equiv|0\rangle_a\otimes|N\rangle_b$ حالت خلأ جبر $su(2)$ تغییر شکل یافته است. از رابطه دوم نیز مشخص است که به ازای یک N مشخص، با یک فضای هیلبرت متناهی الابعاد سرو کار داریم. اکنون می‌توان حالت‌های همدوس دومدی متناظر با سامانه‌ی اپتیک غیرخطی را با استفاده از حالت‌های همدوس متناهی الابعاد [۷] به دست آورد:

$$\begin{aligned}|\mu\rangle&=C^{-1}\exp(\mu\hat{J}_+^{(\kappa)})|0,N\rangle\\&=C^{-1}\sum_{n=0}^{N}\sqrt{\binom{N}{n}}F_{a,b}(n)!\mu^n|n,N-n\rangle,\end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن $F_{a,b}(n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{a,b}(n)=\frac{f_a(\chi_a,n_a)}{f_b(\chi_b,n_b-1)}, \tag{۸}$$

و C ضریب بهنجارش است. آشکار است که حالت‌های همدوس $|\mu\rangle$ را می‌توان به عنوان خانواده‌ای از حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با سامانه‌ی اپتیک غیرخطی به شمار آورد. به سادگی مشاهده می‌شود که برای $\chi_a\to 0$ و $\chi_b\to 0$، (غیر خطیت به سمت صفر)، تابع تغییر شکل یافته به سمت 1 میل می‌کند $(F_{a,b}(n)\to 1)$ و حالت همدوس غیرخطی به حالت همدوس دومدی $su(2)$ [۸] تبدیل می‌شود. شایان ذکر است که اثبات رابطه تفکیک واحد نیز به سادگی از رهیافت مورد استفاده در مرجع [۲] بدست می‌آید.

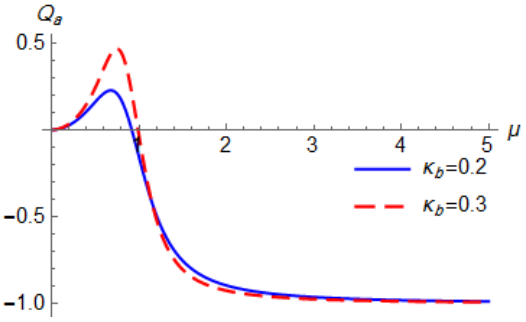
خواص کوانتوم اپتیکی حالت‌های همدوس $|\mu\rangle$

در این بخش، برای بررسی خواص آمار کوانتومی، پارامتر مندل [۹] یعنی

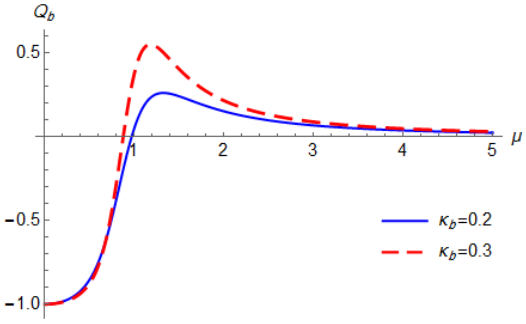
$$Q_i=\frac{(\Delta n_i)^2-\langle\hat{n}_i\rangle}{\langle\hat{n}_i\rangle},\qquad i=a,b \tag{۹}$$

را برای حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با سامانه‌ی اپتیک غیرخطی بررسی خواهیم کرد.

مقادیر مثبت، منفی و صفر پارامتر مزبور به ترتیب نشانگر آمار فراپواسونی، آمار زیرپواسونی و آمار پواسونی است.



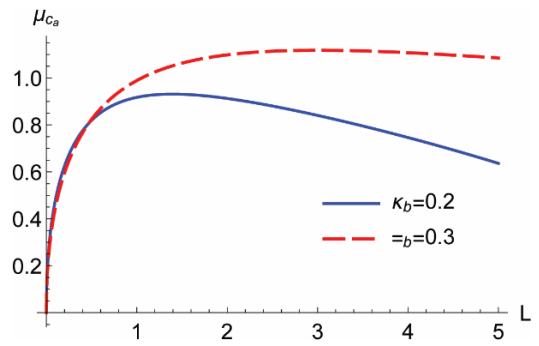
شکل ۱: پارامتر مندل مد a بر حسب μ برای N=10، κ_b =0.3 (خط چین قرمز) و κ_b=0.2 (خط توپر آبی)



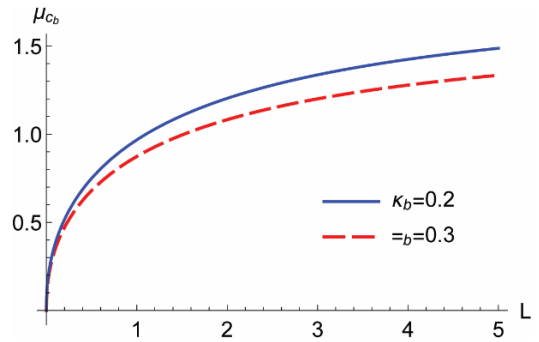
شکل ۲: پارامتر مندل مد b برحسب μ برای N=10، κ_b =0.3 (خط چین قرمز) و κ_b=0.2 (خط توپر آبی)

در شکل‌های (۱) و (۲) پارامتر مندل برای مدهای a و b با $N=10$ و $\kappa_b=0.2,0.3$ برحسب μ رسم شده است. همانطور که نشان داده شده است مد a ابتدا دارای آمار فراپواسونی است و با افزایش μ آمار زیرپواسونی آن تقویت می‌شود در صورتیکه مد b ابتدا دارای آمار زیرپواسونی است و با افزایش μ آمار فراپوسونی می‌شود و در نهایت به آمار پواسونی می‌رسد. علاوه بر این با افزایش غیرخطیت $\kappa_b=\chi_b/\omega_b$ برای یک μ ثابت نیز پارامتر مندل افزایش می‌یابد. در ادامه، باتوجه به رفتار پارامتر مندل در اثر افزایش دامنه حالت همدوس، μ، (افزایش ویژگی‌های غیرکلاسیکی در مد a و کاهش ویژگی‌های غیرکلاسیکی در مد b) می‌توانیم پارامترهای بحرانی μ_{c_a} و μ_{c_b}ای برای گذار بین ویژگی‌های کلاسیکی و غیرکلاسیکی تعریف کنیم، به گونه‌ای که برای مد a (b) در مقدار بحرانی μ_{c_a} (μ_{c_b})، آمار فراپواسونی (زیرپواسونی) حالت همدوس $|\mu\rangle$ به آمار زیرپواسونی (فراپواسونی) تبدیل می‌شود.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-02]



شکل ۳: μ_{c_a} مد a برحسب L برای N=10 ، κ_b =0.3 (خط چین قرمز) و κ_b=0.2 (خط توپر آبی)



شکل۴: μ_{c_b} مد b برحسب L برای N=10 ، κ_b =0.3 (خط چین قرمز) و κ_b=0.2 (خط توپر آبی)

در شکل (۳) و (۴) μ_{c_a} و μ_{c_b} برحسب نسبت ضرایب غیرخطی، یعنی $L=\kappa_b/\kappa_a$، برای مقادیر $\kappa_b=0.2, 0.3$ با $N=10$ رسم شده است. همانطور که نشان داده شده است برای مد a با افزایش L، μ_{c_a} ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد درصورتیکه برای مد b با افزایش L، μ_{c_b} افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش κ_b برای یک L ثابت، μ_{c_a} (μ_{c_b}) افزایش (کاهش) می‌یابد. به عبارت دیگر با تغییر نسبت ضرایب غیرخطی می‌توان خواص غیرکلاسیکی مورد نظر را کنترل کرد. به عنوان نمونه، می‌توان با افزایش پارامتر L، سامانه را به ازای مقادیر بزرگتری از دامنه حالت همدوس $|\mu\rangle$، در حالتی با ویژگی‌های غیرکلاسیکی مربوط به مد a آماده سازی نمود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله توانستیم یک سامانه غیرخطی متناسب با $\chi^{(3)}$ را با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی توصیف کنیم، به گونه‌ای که تابع تغییر شکل در نظریه حالت‌های همدوس غیرخطی را برای سامانه‌ی مزبور به دست آوردیم. همچنین نشان داده شد که با تغییر مولفه‌های غیرخطی سامانه‌ی اپتیکی و μ می‌توان خواص غیرکلاسیکی در سامانه را افزایش یا کاهش داد. که این موضوع می‌تواند مسیر مناسبی برای توصف الگوهای برهمکنش غیرخطی در اپتیک کوانتومی را فراهم آورد.

علاوه بر این با معرفی پارامترهای بحرانی μ_{c_a} و μ_{c_b} به عنوان نقاط گذار از خواص غیرکلاسیکی سامانه به خواص کلاسیکی و با بررسی اثرات غیرخطیت روی μ_{c_a} و μ_{c_b} نشان دادیم که با تغییر نسبت غیرخطیت مولفه‌های سامانه می‌توان خواص غیرکلاسیکی هر دو مد سامانه را کنترل نمود.

مرجع‌ها

[1] W. Vogel and R. L. de Matos Filho, "Nonlinear Coherent States ", Phys. Rev. A., Vol 54, p. 4560, 1996.

[2] A. Mahdifar, R. Roknizadeh, M.H. Naderi, "Geometric approach to nonlinear coherent states using the Higgs model for harmonic oscillator", J. Phys. A: Math.Gen., Vol. 39, pp. 7003-7014, 2006.

[3] M.H. Naderi, M. Soltanlkotabi, R. Roknizadeh," Dynamical Properties of a Two-Level Atom in Three Variants of the Two-Photon q-Deformed Jaynes–Cummings Model", J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 73, pp. 2413-2423, 2004.

[4] J. G. Garrison and R. Y. Chiao, *Quantum Optics*, Oxford University Press, 2008.

[۵] مومنی دمنه، مژگان؛ مهدی فر، علی و رکنی زاده، رسول، "توصیف یک سامانه غیرخطی با استفاده از رهیافت حالت‌های همدوس غیرخطی"، بیست و هفتمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران، زاهدان، ۱۳۹۹.

[6] J. Schwinger, *Quantum Theory of Angular Momentum*, eds. L. C. Biedenharn and H. van Dam Academic Press, New York, 1965.

[7] L. M. Kuang, F. B. Wang and Y. G. Zhou, "Dynamics of a harmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert space", Phys. Lett. A., Vol. 183, p. 1, 1993.

[8] V. Buzek and T. Quang, "Generalized coherent state for bosonic realization of SU(2) Lie algebra", J.Opt. Soc. Amer. B., Vol. 6, p. 2447, 1989.

[9] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-02]