بیست و ششمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و دوازدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه خوارزمی،
تهران، ایران.
۱۵-۱۶ بهمن ۱۳۹۸

بررسی انتشار بسته موج در فرمولبندی مکانیک کوانتومی کسری، عادی و غیرخطی

زینب ذاکری[۱]، لیلا لوایی[۲]، مهدی سلیمانی[۳]، سید علی‌اصغر تروهید[۴]

[۱و۴] گروه فیزیک، دانشگاه آزاد همدان

[۲و۳] گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی قم

چکیده – در این مقاله، انتقال یک بسته‌ی موج گاوسی از یک سد کوانتومی مستطیلی شکل در مکانیک کوانتومی کسری مطالعه می‌شود. ضرایب انتقال، گیراندازی و بازتاب بسته موج گاوسی رونده، در شرایطی که حاصلضرب ارتفاع در پهنای سد پتانسیل ثابت است برحسب K بررسی می‌شود. برای حل معادله شرودینگر از روش عددی تفاضل محدود نیم‌گام استفاده می‌شود و انتشار بسته موج در سه محیط کسری، عادی و غیرخطی با هم مقایسه می‌شود. در این مقاله درمی‌یابیم که پدیده انتقال در محیط کسری با پدیده انتقال در محیط عادی رفتار خیلی متفاوتی دارد، مثلا گیراندازی فقط در محیط کسری اتفاق می‌افتد.

کلید واژه- انتشار موج، ضریب انتقال، ضریب انعکاس، ضریب گیراندازی، معادله شرودینگر کسری.

Investigation of wave packet propagation in the fractional, conventional and nonlinear quantum mechanics formalism

Z.Zakeri[1], L. Lavaei[2], M. Soleimani[3], S. A. A. Terohid[4]

[1,4]Department of Physics, Hamedan Branch, Islamic Azad university, Hamedan, Iran (z.zakeri16@gmail.com), (trohid.ali@gmail.com)

[2]Department of Physics, Qom University of Technology, Qom, Iran (yalda57l@yahoo.com)

[3]Department of Physics, Qom University of Technology, Qom, Iran (soleimani82@yahoo.com)

Abstract- In this paper we study the transfer of a Gaussian wave packet through a rectangular quantum barrier in the fractional quantum mechanics formalism. We investigate the reflection, trapping and transmission

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-07]

coefficients of a moving Gaussian wave packet as a function of parameter k when the product of barrier height V_0 and barrier width is constant. In order to solve the Schrödinger equation we use the finite difference method and try to compare the wave packet propagation in three fractional, linear and nonlinear systems. In this paper we find that the transport phenomenon is very different in the fractional medium compared with the linear system. For example, in our study the trapping occurs only in the fractional medium.

Keywords: fractional Schrödinger equation, reflection coefficient, transmission coefficient, trapping coefficient, **wave packet propagation**.

مقدمه

دینامیک بسته‌های موج در معادله‌ی شرودینگر کسری هنوز یک مسئله‌ی به‌روز است و سختی این مسئله آنجاست که در حالت کلی پیدا کردن پاسخ برای چنین معادلاتی، کار ساده‌ای نیست. معادله‌ی شرودینگر کسری از طریق تعمیم عملگر لاپلاس بدست می‌آید و معمولا در سیستم‌هایی که ذرات با یکدیگر برهم کنش دوربرد دارند بوجود می‌آید. معادله‌ی شرودینگر کسری در تفسیر پدیده‌ها و سیستم‌های مختلف سالیتونی [۲ و ۱]، نوسانات رابی [۳]، نقاط کوانتومی [۴]، دینامیک انتشار طیف [۵]، پلارون‌ها در یک چاه کوانتومی [۶] و ... کاربرد دارد. انتشار یک بسته موج گاوسی برای یک سیستم غیرخطی و خطی غیرکسری قبلا مورد بررسی قرار گرفته است [7]. در این کار، هدف ما تعمیم مقاله مذکور به حالت کسری بوده است. ما در این کار، ضرایب عبور، بازتاب و گیراندازی برای یک موج رونده گاوسی در اثر برخورد به یک سدپتانسیل مستطیلی شکل را بررسی می‌کنیم.

تئوری

ما از معادله‌ی شرودینگر کسری غیرخطی یک بعدی شروع می‌کنیم:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t)=[-\kappa\frac{\partial^{\alpha}}{\partial|x|^{\alpha}}+\gamma|\varphi(x,t)|^{2}+V(x)]\varphi(x,t) \qquad (۱)$$

در این معادله، γ ضریب غیرخطی است و جمله‌ی $\gamma|\varphi(x,t)|^2$ برهم کنش الکترون – الکترون را نشان می‌دهد، یعنی سهم دافعه‌ی کولنی [8]. k در معادله‌ی شرودینگر معمولی $\frac{\hbar^2}{2m^*}$ است که m^* جرم موثر الکترون می‌باشد، یعنی kی بزرگتر معادل جرم موثر کوچکتر است. α ضریب لوی می‌باشد که عملگر مشتق‌گیری کسری برای $1<\alpha\le 2$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial|x|^{\alpha}}\varphi(x,t)=\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)\Gamma(2-\alpha)}\times\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{\infty}|x-\xi|^{1-\alpha}\varphi(\xi,t)d\xi \qquad (۲)$$

که Γ تابع گاما است و به ازای $\alpha=2$، معادله‌ی شرودینگر استاندارد را داریم. $V(x)$ پتانسیل خارجی است که ما بصورت یک سد پتانسیل مستطیلی تعریف می‌کنیم:

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|>L/2\\ V_0, & |x|\le L/2\end{cases} \qquad (۳)$$

که L عرض سدکوانتومی است. ابتدا موج ورودی را یک بسته‌ی موج رونده‌ی گاوسی به شکل زیر در زمان $t=0$ در نظر می‌گیریم:

$$\varphi(x,t=0)\equiv\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}+ikx\right] \qquad (۴)$$

که x_0 مرکز بسته‌ی موج، σ متوسط پهنای موج و k بردار موج است. سپس تحول این بسته‌ی موج را در محیط کسری بدست می‌آوریم. برای این منظور، معادله‌ی (۱) را به کمک معادله‌ی (۲) بصورت دستگاه چند معادله چند مجهول درمی‌آوریم که معلومات ما تابع موج در لحظه‌ی t

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-07]

و مجهولات، تابع موج در لحظه t+dt می‌باشد. حال این دستگاه معادلات را با کمک نرم‌افزار Matlab حل می‌کنیم و با داشتن تابع موج در لحظه t=0 می‌توانیم تابع موج در لحظه‌ی t را بدست آوریم.

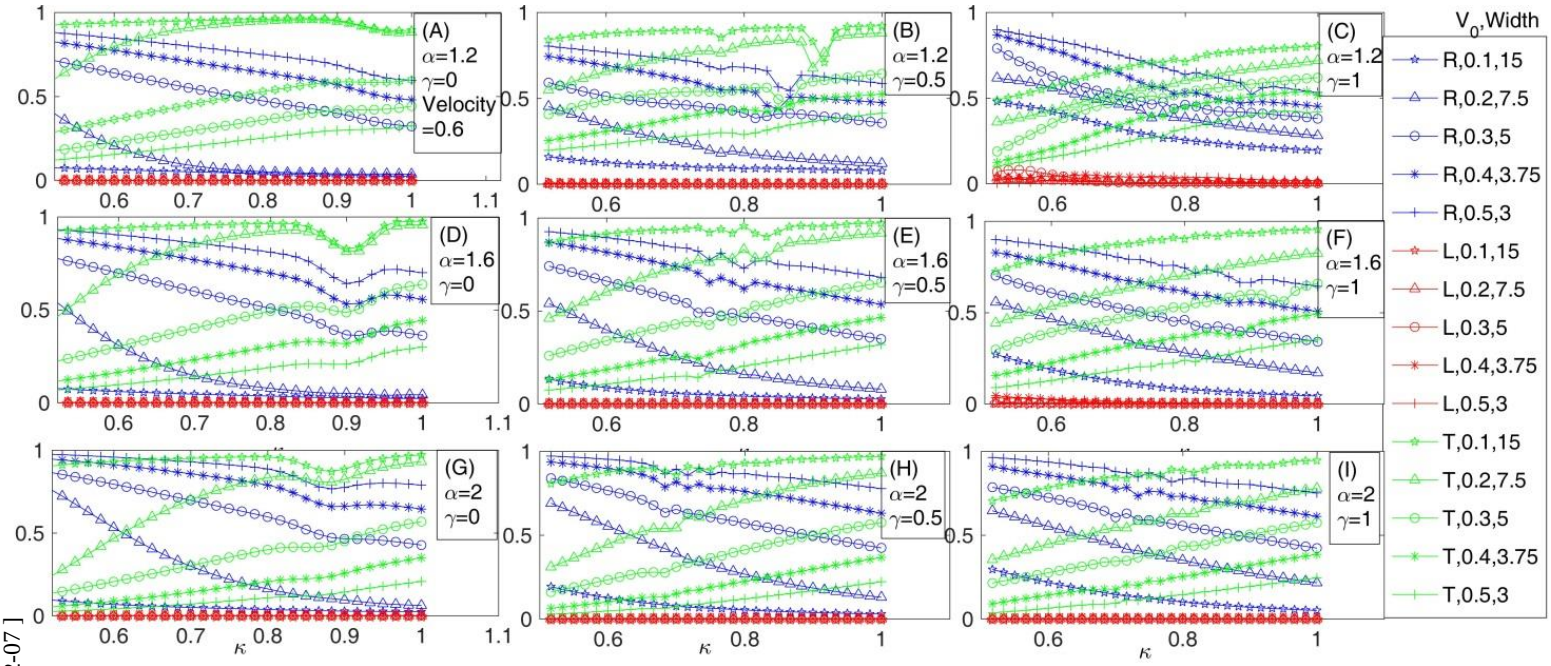
نتایج و بحث‌ها

پنل‌های A تا I ضرایب بازتاب، انعکاس و گیراندازی را به عنوان تابعی از k، به ازای مقادیر مختلف γ و α نشان می‌دهند. ۵ حالت مختلف به ازای مقادیر مختلف V_0 و W را در نظر می‌گیریم، بطوریکه در تمام حالت‌ها حاصل-ضرب ارتفاع سد در پهنای آن مقدار ثابت 1.5 باشد ($V_0 \times W = 1.5$).

(حالت اول: $V_0 = 0.1, W = 15$؛ حالت دوم: $V_0 = 0.2, W = 7.5$؛ حالت سوم: $V_0 = 0.3, W = 5$؛ حالت چهارم: $V_0 = 0.4, W = 3.75$؛ حالت پنجم: $V_0 = 0.5, W = 3$)

حالت $\alpha = 2$ مربوط به حالت غیر کسری و بقیه‌ی αها مربوط به حالت کسری‌اند. حالت γی صفر مربوط به حالت خطی و بقیه‌ی γها مربوط به حالت غیر خطی‌اند. در تمام حالت‌ها، به ازای kی مشخص، با افزایش V_0 و کاهش همزمان W ضریب بازتاب افزایش و ضریب انتقال کاهش می‌یابد و این بدین معناست که وقتی سد بلندتر و باریک‌تر می‌شود ضریب بازتاب (انتقال) افزایش (کاهش) پیدا می‌کند.

در مورد ضریب انعکاس، برای سدهای کوتاه‌تر و پهن‌تر (حالت‌های اول تا سوم)، با افزایش k تقریبا روند کاملا



شکل: ضرایب انعکاس، انتقال و گیراندازی بر حسب پارامتر k

نزولی مشاهده می‌شود، یعنی ضریب انعکاس بر حسب k به صورت یکنواخت تغییر می‌کند. با افزایش V_0 و کاهش همزمان W، به ازای بعضی از مقادیر k، رفتار ضریب انعکاس غیریکنواخت می‌شود. به عنوان مثال در مورد پنل G، که مربوط به معادله دیفرانسیل غیرکسری (معمولی) و خطی است، با افزایش k، در مورد حالتهای اول تا سوم روند کاملا نزولی در ضریب انعکاس مشاهده می‌شود. زمانی که معادله از حالت خطی خارج شود و به پنل H

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-07]

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

برویم در مورد حالت سوم ($V_0 = 0.3, W = 5$) به ازای $\kappa \approx 0.7$، روند غیریکنواختی در ضریب انعکاس مشاهده می‌شود. حال اگر از پنل G به پنل D برویم، یعنی معادله دیفرانسیل خطی و کسری، این اتفاق در $\kappa \approx 0.9$ می‌افتد. یعنی به زبان جرم موثر، با کاهش پیوسته جرم موثر(معادل افزایش پیوسته‌ی k) در نواحی $\kappa \approx 0.9$ انعکاس ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود که نتیجه‌ای غیربدیهی ست.

درمورد ضریب انتقال، نایکنواختی بیشتر در سدهای کوتاهتر و عریض‌تر دیده می‌شود و در مورد سدهای بلندتر و باریکتر (حالت‌های چهارم و پنجم) با افزایش k ضریب انتقال روند کاملا صعودی دارد.در مورد ضریب گیراندازی، همانطور که از پنل‌های A تا I دیده می‌شود، فقط در پنل‌های F و C ضریب گیراندازی غیر صفر داریم. این دو پنل مربوط به معادله دیفرانسیل کسری و غیرخطی با $\gamma = 1$ می‌باشند، یعنی برای اینکه بتوان موج را بعد از برخورد با سد پتانسیل داخل سد گیرانداخت حتما باید در محیط کسری و به اندازه کافی غیرخطی باشیم.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، انتقال یک بسته‌ی موج گاوسی از یک سد کوانتومی مستطیلی شکل در مکانیک کوانتومی کسری مطالعه شده است. ضرایب انتقال، گیراندازی و بازتاب بسته موج گاوسی رونده، در شرایطی که حاصلضرب ارتفاع در پهنای سد پتانسیل مقدار ثابت ۱٫۵ است ($V_0 \times W = 1.5$)، به ازای مقادیر مختلف γ و α، برحسب k بررسی شده است. مشاهده شد که برای یک سد پتانسیل با ارتفاع و پهنای مشخص، با افزایش k ضریب انعکاس کاهش می‌یابد و ضریب انتقال افزایش می‌یابد. به ازای بعضی ازمقادیر k روند کاملا نزولی انعکاس و کاملا صعودی انتقال از بین می‌رود که مشخص کردن مقادیری از k که این اتفاق در آن‌ها می‌افتد بستگی به مقادیر a و g دارد، یعنی معادله دیفرانسیل ما تا چه اندازه کسری و غیرخطی است. از طرفی زمانی که در محیط کسری و به اندازه کافی غیرخطی هستیم می‌توانیم به ازای مقادیری از k ضریب گیراندازی غیر صفر داشته باشیم. در نتیجه برای یک سد پتانسیل با عرض و ارتفاع مشخص، می‌توان با تغییر a، g و k مقدار موردنظر ضریب انعکاس، ضریب انتقال و ضریب گیراندازی را بدست آورد.

مرجع‌ها

[1] W.P. Zhong, M. Belic and Y. Zhang, Annals of Physics "Accessible solitons of fractional dimension" 368,110-116 (2016).

[2] G. Wang, T. Xu, "Optical soliton of time fractional Schrödinger equations with He's semi-inverse method" Laser Phys. 25, 055402 (2015).

[3] Y. Zhang, R. Wang, H. Z.hong, J. Zhanf, M.R. Belic and Y. Zhang, opt. expr. "Resonant mode conversions and Rabi oscillations in a fractional Schrödinger equation" 25, 32401-32410 (2017).

[4] R.A. El-Nabulsi, Eur. Phys. J. Plus "Time-fractional Schrödinger equation from path integral and its implications in quantum dots and semiconductors" 133, 394-394-15 (2018).

[5] L. Zhang, C. Li, H. Zhong, C. Xu, D. Lei, Y. Li and D. Fan opt. expr. "Propagation dynamics of super-Gaussian beams in fractional Schrödinger equation: from linear to nonlinear regimes" 24, 14406-14418(2016).

[6] A. Matos-Abiague, Phys. Rev. B "Polaron effect in GaAs-Ga1-xAlxAs quantum wells: A fractional-dimensional space approach" 65, 165321-165321-9 (2002).

[7] M. Vatan, B. Farnam, M. Solaimani, S.M.A. Aleomraninejad, Optik "Transport Properties of a TravelingWave Packet through Rectangular Quantum Wells and Barriers" 136, 281-288 (2017).

[8] S.M.A. Aleomraninejad, M. Solaimani, M. Mohsenyzadeh and L. Lavaei, Phys. Scr. "Discretized Euler-Lagrange variational study of nonlinear optical rectification coefficients" 93, 095803-095803-7(2018).

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-07]