درهم‌تنیدگی در یک سامانه اپتومکانیکی چهاربخشی

فاطمه محمودی مؤمن‌آبادی[۱]، حمیدرضا باغشاهی[۱]، محمّدجواد فقیهی[۲] و سیّدیحیی میرافضلی[۱]

[۱]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان، رفسنجان
[۲]گروه فوتونیک، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، ماهان، کرمان

چکیده– در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی در یک سامانه اپتومکانیکی چهاربخشی بررسی می‌شود. این سامانه از دو اتم دوترازی تشکیل می‌شود که یکی از آن‌ها با مدهای کاواک برهم‌کنش می‌کند و دیگری بدون هیچ برهم‌کنشی در بیرون کاواک واقع است. با فرض این‌که یکی از آینه‌های کاواک متحرّک است درهم‌تنیدگی با استفاده از سنجه منفیّت ارزیابی می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که از بین همه حالت‌های مورد بررسی، درهم‌تنیدگی تنها بین دو اتم ایجاد می‌شود که با جفت‌شدگی اپتومکانیکی قابل کنترل است.

کلیدواژه: درهم‌تنیدگی، سامانه اپتومکانیکی، منفیّت

Entanglement in a Quadripartite Optomechanical System

Fatemeh Mahmoudi Momenabadi[1], Hamid Reza Baghshahi[1], Mohammad Javad Faghihi[2] and Sayyed Yahya Mirafzali[1]

[1]Department of Physics, Faculty of Science, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan
[2]Department of Photonics, Faculty of New Science & Technology, Graduate University of Advanced Technology, Mahan, Kerman

Abstract- In this paper, entanglement dynamics in a quadripartite optomechanical system is investigated. The system contains two two-level atoms such that one atom interacts with cavity modes and the other is out of the cavity with no interaction. With the assumption that one of the cavity mirrors is in motion, entanglement is evaluated by negativity. The results show that among the considered subsystem, only two atoms are entangled, which can be controlled by the optomechanical coupling.

Keywords: Entanglement, Optomechanical System, Negativity

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-05]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

۱- سرآغاز

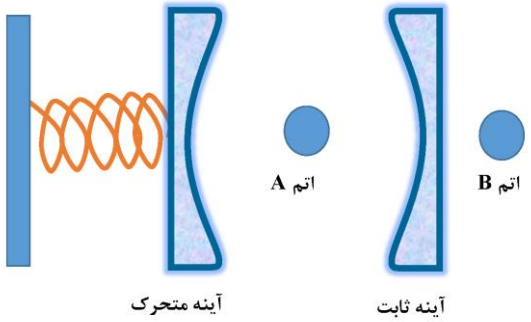
درهم‌تنیدگی یکی از اصلی‌ترین ویژگی‌های سامانه‌های کوانتومی است که آن را از همتای کلاسیکی متمایز می‌سازد. این پدیده نقش مهمی در مبحث پردازش اطلاعات کوانتومی از قبیل دوربری و رمزنگاری کوانتومی ایفا می‌کند [۱]. از جمله مهم‌ترین سامانه‌های فیزیکی در دسترس که امکان وقوع درهم‌تنیدگی در آن‌ها وجود دارد می‌توان به سامانه‌های برهم‌کنشی اتم و میدان اشاره کرد. در این بین، سامانه‌های اپتومکانیکی، به‌عنوان یکی از بنیادی‌ترین سامانه‌های اپتیک کوانتومی، توجّه بیش‌تری را به خود جلب کرده‌اند. این سامانه‌ها در ساده‌ترین حالت خود از یک کاواک اپتیکی با یک آینه متحرّک در انتهای آن تشکیل شده‌اند. از دیگر کاربردهای سامانه‌های اپتومکانیکی می‌توان سردسازی، اندازه‌گیری فوق دقیق و تولید حالت‌های غیرکلاسیکی را نام برد [۲].

در این مجال یک سامانه اپتومکانیکی را در نظر می‌گیریم که یک اتم دوترازی با مد کاواک برهم‌کنش می‌کند و اتمی مشابه با آن بدون هیچ برهم‌کنشی در بیرون کاواک قرار دارد. یادآور می‌شود در بازیابه‌ی [۳]، سامانه‌ای مشابه با سامانه‌ی حاضر، با این تفاوت که برهم‌کنش در یک کاواک اپتیکی (نه اپتومکانیکی) صورت می‌پذیرد، به بحث گذاشته شده است. هم‌چنین بازیابه‌ی [۴] به مدل جینز-کامینگز در یک کاواک اپتومکانیکی پرداخته است. در هر دو پژوهش اخیر، بعد از تحول سامانه درهم‌تنیدگی بین تمام زیرسامانه‌ها گزارش شده است. با این وصف، سامانه‌ی مورد مطالعه‌ی حاضر را می‌توان تلفیق موارد اشاره‌شده دانست. باید دید آیا درهم‌تنیدگی در این سامانه مشابه با سامانه‌های پیشین در بین تمام زیرسامانه‌ها رخ می‌دهد یا شرایط متفاوتی رقم می‌خورد.

این مقاله سعی می‌کند به بررسی اثرات ناشی از وجود آینه متحرّک (اپتومکانیک کاواک) و اتم غیربرهم‌کنشی بیرونی روی دینامیک درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه‌ها بپردازد و زیرسامانه‌های درهم‌تنیده را شناسایی نماید. سپس نتایج به‌دست‌آمده با گزارش‌های پیشین به بحث گذاشته می‌شود.

۲- مدل

یک سامانه اپتومکانیکی را شامل یک کاواک اپتیکی با دو آینه‌ی متحرّک و ثابت در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم یک اتم دوترازی در کاواک با مد میدان برهم‌کنش می‌کند و یک اتم دوترازی دیگر بدون هیچ‌برهم‌کنشی در بیرون کاواک قرار دارد.



شکل ۱: سامانه فیزیکی شامل یک اتم دوترازی قرارگرفته درون کاواک با یک آینه متحرک و یک اتم دوترازی در خارج آن.

هامیلتونی کل برای چنین سامانه‌ای به شکل زیر است:

$$H = \hbar\omega a^{\dagger}a + \hbar\omega_m b^{\dagger}b + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z^A + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z^B + \hbar\Omega\left(a\sigma_+^A + a^{\dagger}\sigma_-^A\right) - \hbar G a^{\dagger}a\left(b + b^{\dagger}\right) \qquad (۱)$$

که در آن $a^{\dagger}$ و a و $b^{\dagger}$ و b به ترتیب عملگرهای آفرینش و نابودی برای مد کاواک با بسامد ω و مد آینه با بسامد ω_m هستند. G ضریب جفت‌شدگی اپتومکانیکی و Ω ثابت جفت‌شدگی بین اتم و میدان است. هم‌چنین σ_z، σ_+ و σ_- نیز عملگرهای پائولی اتمی و بالانویس‌های A و B برچسب اتم‌ها هستند.

فرض می‌کنیم دو اتم در ابتدا در یک حالت درهم‌تنیده، کاواک در حالت عددی $|n\rangle$ و آینه در حالت پایه $|0\rangle$ آماده‌سازی شده باشند. بنابراین حالت اولیه کل سامانه به شکل زیر خواهد بود:

$$|\psi(0)\rangle = \cos\theta\left|e^A g^B n0\right\rangle + \sin\theta\left|g^A e^B n0\right\rangle \qquad (۲)$$

که در آن $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. در ادامه می‌خواهیم بردار حالت سامانه را در هر لحظه دلخواه بدست آوریم. برای رسیدن به این هدف، هامیلتونی مؤثر سامانه را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم [۵]:

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-05]

$$H_{eff}=\frac{\hbar G\Omega}{\omega_m}\left(a^\dagger b\sigma_-^A+ab^\dagger\sigma_+^A\right)-\frac{\hbar G^2}{\omega_m}\left(a^\dagger a\right)^2 -\frac{\hbar\Omega^2}{\omega_m}\left(a^\dagger a\sigma_3+\sigma_+\sigma_-\right) \quad (۳)$$

درهامیلتونی بالا جمله اول نشان دهنده برهم‌کنش سه بخشی آینه، اتم و کاواک است. جمله دوم به اثر غیرخطّی کِر دلالت دارد و جمله سوم اثر استارک را بیان می‌کند. بردار حالت سامانه را در هر لحظه دلخواه t به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\psi(t)\rangle=M_1(t)\left|e^Ag^Bn0\right\rangle+M_2(t)\left|g^Ae^Bn0\right\rangle +M_3(t)\left|e^Ae^B(n-1)1\right\rangle \quad (۴)$$

که در آن $M_i\,(i=1,3)$ ضرایب معرّف دامنه احتمال هستند که با در نظرگرفتن هامیلتونی (۳) و حالت اولیه (۲) و حل معادله شرودینگر وابسته به زمان به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
M_1(\tau)&=\cos\theta\exp\left[i\tau\left(n^2+(1+n)\right)\frac{\Omega^2}{G^2}\right],\\
M_2(\tau)&=\tfrac{1}{2}\sin\theta\exp\left(-\tfrac{1}{2}i\tau\left[R_1+\left(-1-2(-1+n)n\right)\right]\right)\\
&\quad\times\exp\left[\left(-1+e^{iR_1\tau}\right)\tfrac{1}{R_1}(-1+2n)+\left(1+e^{iR_1\tau}\right)\right]\\
&\quad\times\exp\left[-\left(2\left(-1+e^{iR_1\tau}\right)n\tfrac{1}{R_1}\tfrac{\Omega^2}{G^2}\right)\right],\\
\mathrm{M}_3(\tau)&=-\exp\left(-\tfrac{1}{2}i\tau\left[R_1+\left(-1-2(-1+n)n\right)\right]\right)\\
&\quad\times R_1^{-1}\sin\theta\left(-1+e^{iR_1\tau}\right)\sqrt{n}\,\tfrac{\Omega}{G}
\end{aligned} \quad (۵)$$

در روابط بالا R_1 و τ با روابط زیر داده می‌شوند:

$$\mathrm{R}_1=\sqrt{(1-2n)^2+G^{-2}\left(4n^2\Omega^2-8(-1+n)n\Omega^2\right)},\quad \tau=G^2t/\omega_m \quad (۶)$$

پس از یافتن شکل دقیق بردارحالت سامانه، بررسی ویژگی‌های سامانه شامل درهم‌تنیدگی ممکن می‌شود.

۳- اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی

پیش از بحث و بررسی درباره میزان درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه‌ها، لازم به ذکر است که با توجّه به حالت درنظر گرفته شده برای کاواک $(|n\rangle)$ باید مسأله‌ی حالت خلأ $(n=0)$ را از حالت‌های برانگیخته $(n\neq 0)$ جدا کرد و رویکردهای متفاوتی را اتخاذ نمود. در این‌جا تمرکز خود را روی حالت‌های برانگیخته‌ی مد تابشی معطوف می‌کنیم. با در نظرگرفتن $n\neq 0$ زیرسامانه‌ی «دو اتم» به صورت یک کیوبیت-کیوبیت و زیرسامانه‌های «اتم A-کاواک»، «اتم B-کاواک»، «اتم A-آینه» و «اتم B-آینه» به‌طور مؤثر با یک کیوبیت-کیوتریت معادل می‌شوند (لازم به ذکر است که زیرسامانه‌های ذکر شده زیرسامانه‌هایی هستند که از دو تک بخش از سامانه کل تشکیل شده‌اند. می‌توان زیر سامانه‌هایی مانند «اتم A + اتم B-آینه + کاواک» که از دو قسمت دو بخشی از کل سامانه تشکیل شده نیز در نظر گرفت که در اینجا هدف ما بررسی آنها نیست). با توجّه به این‌که معیار ترانهاده جزئی مثبت که منفیّت بر پایه آن بنا شده است شرط لازم و کافی برای درهم‌تنیدگی سامانه‌های 2×2 و 2×3 است، بنابراین در اینجا سنجه منفیّت می‌تواند میزان درهم‌تنیدگی بین زیر سامانه‌های یادشده را آشکار سازد. به همین دلیل در ادامه از این سنجه برای محاسبه درهم‌تنیدگی استفاده می‌کنیم. سنجه منفیت برای یک سامانه دوجزئی ρ_{AB} با ابعاد $d\times d'$ $(d\le d')$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$N(\rho_{AB})=\frac{\left\|\rho^{T_B}\right\|-1}{d-1} \quad (۷)$$

به طوری‌که ρ^{T_B} ترانهاده جزئی حالت ρ برحسب زیرسامانه B است و $\left\|\rho^{T_B}\right\|$ نُرم رد عملگر ρ^{T_B} است. نُرم رد برای هر عملگر دلخواهی مانند X به صورت $\|X\|=Tr\sqrt{X^\dagger X}$ تعریف می‌شود.

سنجه منفیّت را می‌توان برحسب ویژه‌مقدارها یا ویژه‌مقدارهای منفی ماتریس ترانهاده جزئی نیز نوشت. با توجّه به این‌که ماتریس ترانهاده جزئی می‌تواند ویژه‌مقدارهای مثبت و منفی داشته باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$\left\|\rho^{T_B}\right\|=\sum_i|\lambda_i|=\sum_i\lambda_i-2\sum_i\lambda_i^{neg}=1-2\sum_i\lambda_i^{neg} \quad (۸)$$

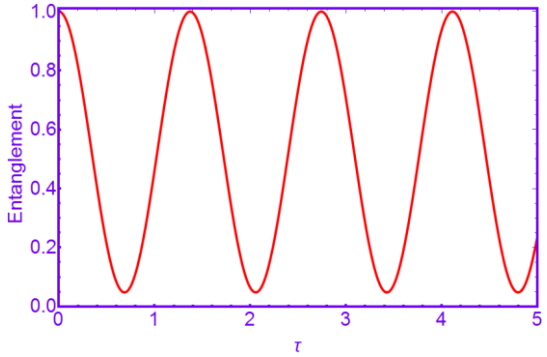
که در آن λ_iها ویژه مقادیر ماتریس ترانهاده جزئی هستند و بالانویس neg به ویژه‌مقادیر منفی اشاره دارد. با توجه به رابطه (۷) برای یک سامانه 2×2، منفیّت بین

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

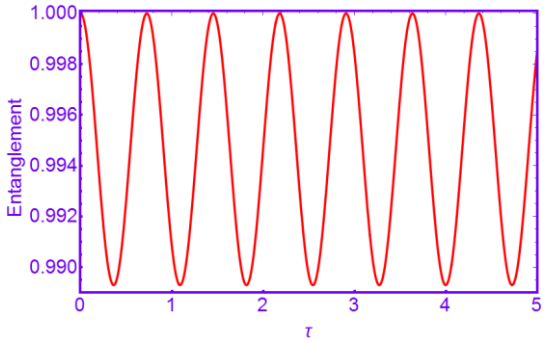
[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-05]

مقدار کمینه صفر و مقدار بیشینه یک تغییر می‌کند.

با محاسبه ماتریس چگالی کاهش یافته برای زیر زیرسامانه‌های اشاره‌شده و محاسبه ماتریس ترانهاده جزئی برای آن‌ها می‌توان مقدار درهم‌تنیدگی را در این زیر سامانه‌ها محاسبه کرد.



شکل ۲: نمودار درهم‌تنیدگی بین دو اتم A و B به ازای $\theta=\pi/4$، $G=\Omega$ و $n=5$.



شکل۳: نمودار درهم‌تنیدگی بین دو اتم A و B به ازای $\theta=\pi/4$، $G=5\Omega$ و $n=5$.

نتایج دینامیکی حاصل از سنجه‌ی منفیّت نشان می‌دهند که زیرسامانه‌های «اتم A-کاواک»، «اتم B-کاواک»، «اتم A-آینه» و «اتم B-آینه» درهم‌تنیده نیستند و به عبارتی جداپذیر هستند (در این مجال کوتاه، از آوردن نمودارهای منفیّت مربوط به این موارد پرهیز کردیم). درعوض، تنها در زیرسامانه‌ی اتم-اتم با انتخاب فازهای متفاوت (θهای متفاوت) به غیر از $\theta=0,\pm\pi/2$ درهم‌تنیدگی قابل مشاهده است. با انتخاب این سه فاز همان‌طور که از رابطه (۲) مشخص است دو اتم در ابتدا درهم‌تنیده نیستند و غیردرهم‌تنیده نیز باقی می‌مانند.

در شکل ۲ تغییرات زمانی درهم‌تنیدگی بین دو اتم را به صورت تابعی از زمان مشخصه τ نشان می‌دهد. همان‌طور که از این شکل مشخص است درهم‌تنیدگی بین دو اتم از مقدار بیشینه خود (حالت‌های بِل) شروع می‌شود و همواره رفتار نوسانی از خود نشان می‌دهد. با تغییر پارامتر G، شکل ۳ به بررسی تأثیر جفت‌شدگی اپتومکانیکی بر درهم‌تنیدگی دو اتم رسم شده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است، افزایش ثابت جفت‌شدگی اپتومکانیکی باعث کاهش دامنه افت و خیز درهم‌تنیدگی می‌شود. به عبارت دیگر در این مورد فاصله بین بیشینه و کمینه درهم‌تنیدگی بسیار ناچیز است و تقریبا می‌توان گفت درهم‌تنیدگی به یک حالت پایا رسیده است.

۴- برداشت

در این مقاله به بررسی درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه‌های مختلف یک سامانه اپتومکانیکی شامل یک کاواک اپتیکی تک‌مد با یک آینه متحرّک، یک اتم در داخل و یک اتم در بیرون کاواک پرداختیم. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهند برخلاف سامانه‌های گزارش‌شده در بازیابه‌های [۳ و ۴] که در آن‌ها درهم‌تنیدگی در همه زیرسامانه‌ها رخ می‌داد، در سامانه‌ی فیزیکی حاضر، از بین زیرسامانه‌های مورد بررسی، تنها زیرسامانه‌ی اتم-اتم درهم‌تنیده هستند و دیگر سامانه‌ها جداشدنی. هم‌چنین نتایج عددی گواه این مطلب هستند که افزایش ثابت جفت‌شدگی اپتومکانیکی درهم‌تنیدگی بین دو اتم را به یک حالت پایا می‌رساند.

بازیابه‌ها

[1] M.A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press, 2010).

[2] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, F. Marquardt, "Cavity optomechanics", *Rev. Mod. Phys.* 86, 1391, 2014.

[3] Z-J. Li, J-Q. Li, Y-H. Jin, Y-H. Nie, "Cavity evolution and transfer of entanglement between an isolated atom and a Jaynes-Cummings model", *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 40, 3401, 2007.

[4] Q. H. Liao, W. J. Nie, J. Xu, Y. Liu, N. R. Zhou, Q. R. Yan, A. Chen, N. H. Liu, M. A. Ahmad, "Properties of linear entropy of the atom in a tripartite cavity-optomechanical system", *Laser. Phys.* 26, 055201, 2016.

[5] D. F. V. James, J. Jerke, "Effective Hamiltonian theory and its applications in quantum information", *Can. J. Phys.* 85, 652, 2007

[6] G. Vidal, R. F. Werner, "Computable measure of entanglement", *Phys. Rev. A* 65, 032314, 2002.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-05]