



## تصویربرداری تک‌پیکسلی به روش نمونه‌برداری فشرده

مرضیه سلیمی، محمد مهدی سید خاموشی، لیلا مهرور، سید حسن توسلی

تهران، ولنجک، دانشگاه شهید بهشتی، پژوهشکده لیزر و پلاسمای

چکیده - تصویربرداری به روش نمونه‌برداری فشرده، یک روش تصویربرداری تک‌پیکسلی است که با بهره‌گیری از نظریه سنجش فشرده<sup>۱</sup> (CS) تصویر را با نمونه‌برداری کمتری نسبت به ابعاد آن بازیابی می‌نماید. در این مقاله ابتدا به معرفی نظریه سنجش فشرده و کاربرد آن در تصویربرداری می‌پردازیم، سپس نتایج شبیه‌سازی و چیدمان تجربی بازیابی تصویر به روش تصویربرداری فشرده و روش شبح‌نگاری<sup>۲</sup> را با یکدیگر مقایسه می‌نماییم.

کلید واژه- پایه تنک، تصویربرداری تک‌پیکسلی، تصویربرداری فشرده، سنجش فشرده

## Single Pixel Imaging by Using Compressive Sampling

Marziyeh Salimi, Mohammad Mahdi Seyed Khamoushi, Leila Mehrvar, Seyed Hassan Tavassoli

Laser and Plasma Research Institute, Shahid Beheshti University, Velenjak, Tehran, Iran

Abstract- Compressive sampling is a kind of single pixel imaging which exploits Compressive Sensing (CS) theory to reduce the number of sampling smaller than the number of image pixels. In this paper, we firstly present CS theory and its application in imaging, then we will compare simulation and experimental results of compressive imaging with ghost imaging (GI).

Keywords: Compressive Sensing, Compressive Imaging, Single Pixel Imaging, Wavelet Basis

<sup>۱</sup> Compressive Sensing

<sup>۲</sup> Ghost Imaging

مقایسه شیوه‌سازی این‌دو، نشان خواهیم داد که در تصویر-برداری به روش نمونه‌برداری فشرده با تعداد نمونه‌برداری کمتر، تصاویری با کیفیت مناسب‌تر حاصل خواهد شد. بر اساس بررسی‌های ما برای نخستین بار در کشور، از روش نمونه‌برداری فشرده به صورت تجربی در تصویر-برداری تک-پیکسلی استفاده گردیده که در ادامه به اختصار معرفی خواهد شد.

## ۲- روش نظری و معادلات ریاضی

یک سیگنال محدود زمانی (مانند سیگنال فوتودیود) را می-توان به صورت یک بردار  $1 \times N$  نمایش داد. یک تصویر دو بعدی را نیز می‌توان با قرار دادن پیکسل‌های آن در یک سطر در امتداد یکدیگر، به صورت یک بردار نمایش داد. بنابراین در ادامه سیگنال  $x$  را که یک تصویر دو بعدی است، به شکل بردار نمایش می‌دهیم.

### ۲-۱- معرفی سنجش فشرده [۱]

در سنجش فشرده هر اندازه‌گیری به صورت ضرب داخلی بردارهای آزمون ( $\varphi_i$ ) در جسم (سیگنال  $x$ ) می‌باشد:

$$(1) \quad y_i = \langle X | \varphi_i \rangle$$

اگر بردارهای آزمون  $\varphi_i$  در سطرهای یک ماتریس و سیگنال-های اندازه‌گیری  $y_i$  را در یک بردار قرار دهیم، به ترتیب ماتریس‌های  $\Phi$  و  $y$  به دست می‌آید. برای  $\Phi$  داریم:

$$(2) \quad \Phi_{n \times n} = \begin{bmatrix} \{\varphi_1\} \\ \vdots \\ \{\varphi_n\} \end{bmatrix}$$

برای بازیابی سیگنال  $x$  معادله زیر باید حل شود :

$$(3) \quad y_{n \times 1} = \Phi_{n \times n} \times X_{n \times 1}$$

اما همانطور که از معادله (۳) پیداست باید تعداد اندازه‌گیری-های  $y$  با ابعاد سیگنال (تعداد پیکسل‌های تصویر) برابر باشد. بدینهی است که در این صورت، فشرده‌سازی در میان نخواهد بود.

می‌توان بردار  $x$  را با استفاده از پایه‌های بهنجار و متعامد  $\Psi_i$  توصیف نمود. با قرار دادن پایه‌های  $\Psi_i$  در ستون‌های یک ماتریس، و ضرایب  $\alpha_i$  در یک بردار به ترتیب ماتریس  $\Psi$  و بردار  $\alpha$  بدست می‌آید.

## ۱- مقدمه

در تصویر-برداری با دوربین‌های دیجیتال رایج، تصویر توسط سنسور آرایه‌ای CCD ثبت می‌شود. CCD آرایه‌ای از سنسورهای است که نور را در ناحیه طیفی معینی، به بار تبدیل کرده و بدین ترتیب تصویر را به صورت دیجیتالی ثبت می-نماید. ساخت سنسورهای آرایه‌ای (CCD) در نواحی طیفی غیرمرئی از جمله مادون قرمز و ماوراءپر هزینه است، از این رو دوربین‌های دیجیتالی برای تصویر-برداری غیرمرئی گران تمام خواهند شد.

تصویر-برداری تک-پیکسلی<sup>۱</sup> روش دیگری از تصویر-برداری است که برای گرفتن تصاویر دو بعدی با استفاده از یک سنسور تک-پیکسلی (فوتودیود) و بدون نیاز به استفاده از CCD انجام می‌شود. مزیت این روش آن است که می‌توان بسادگی، بدون تحمیل هزینه‌های گراف ساختار مشابهی را برای طیفی بکار برد. یک راهکار برای گرفتن تصویر به این شیوه اسکن نقطه به نقطه صحنه است، در این صورت نمونه-برداری دقیقاً باید با ابعاد صحنه برابر باشد که تبعاً تحقق آن در بسیاری از موقعیت با مشکل جدی مواجه می‌شود.

یکی دیگر از انواع تصویر-برداری تک-پیکسلی شب-نگاری نام دارد، که با تاباندن طرح رندوم به جسم و دریافت نور عبوری (بازتابی) از جسم توسط فوتودیود، با محاسبه همبستگی<sup>۲</sup> سیگنال‌ها و طرح‌ها، تصویر را بازیابی می‌نماید. در این روش به دلیل رندوم بودن طرح‌ها هر چه تعداد نمونه-برداری بیشتر باشد، تصویر بهتری بدست خواهد آمد. شب-نگاری از نظر زمان مورد نیاز برای گرفتن تصویر به صرفه نیست؛ چرا که به تعداد بیشتری نمونه-برداری نیاز داشته و درنتیجه زمان طولانی‌تری برای تحقق آن مورد نیاز است.

در این تحقیق از تصویر-برداری به روش نمونه-برداری فشرده<sup>۳</sup> استفاده گردیده که در مقایسه با تصویر-برداری رایج دارای شرایط اقتصادی بهتر می‌باشد و همچنین در مقایسه با دیگر تصویر-برداری‌های تک-پیکسلی مذکور در زمان کوتاه‌تری انجام می‌پذیرد، گرچه به محاسبات بیشتری برای بازیابی تصویر نیازمند است. بنابراین در این مقاله، با مقایسه‌ی تصاویر گرفته شده به روش نمونه-برداری فشرده و شب-نگاری و همچنین

<sup>۱</sup> Single Pixel Imaging

<sup>۲</sup> Correlation

<sup>۳</sup> Compressive Sampling

## ۲-۲- نحوه انتخاب $\Psi$

پایه  $\Psi$  باید به گونه‌ای انتخاب شود که تصویر در این پایه تنک باشد، بیشتر تصاویر طبیعی در فضای مانند فوریه و موجک<sup>۶</sup> تنک هستند. در این مطالعه، پایه‌های موجک برای بازیابی تصویر انتخاب شده‌اند.

## ۲-۳- نحوه انتخاب $\varphi$

اگر بخواهیم اندازه‌گیری را در همان فضای بازیابی تصویر ( $\Psi$ ) انجام دهیم، بیشترین اطلاعاتی که به دست می‌آوریم صفر خواهد بود، زیرا در فضای  $\Psi$  بیشتر ضرایب صفر هستند. بنابراین بهترین راه برای اینکه با احتمال زیاد بتوان در هر بار اندازه‌گیری از ضرایب غیر صفر اطلاعاتی بدست آورد، این است که  $\varphi$  را ساختاری کاملاً رندوم داشته باشد. نتیجه بهینه‌سازی سنجش فشرده این است که از  $N \ll m$  اندازه‌گیری در پایه رندوم و غیرهمدوس با  $\Psi$  می‌توان تصویر را بازیابی نمود.

## ۲-۴- معرفی همبستگی در شبیه نگاری

در روش شبیه نگاری، برای بازیابی تصویر از همبستگی طرح رندوم با سیگنال دریافتی از جسم استفاده می‌شود. همبستگی در واقع چگونگی تغییرات دو کمیت را نسبت به یکدیگر مشخص می‌نماید. به زبان ریاضی [3]:

$$GI = \langle \varphi xy \rangle - \langle \varphi \rangle \langle y \rangle \quad (10)$$

که در آن  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dots \equiv \langle \dots \rangle$  می‌باشد. در ادامه تصویر بازیابی شده با این معادله را با GI نشان می‌دهیم.

## ۳- روش تجربی تصویر برداری فشرده

چیدمان آزمایشگاهی استفاده شده در این مقاله همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده است، شامل یک روزنئه جمع-کننده نور دو بعدی، سنسور تک‌پیکسلی (فوتودیود)، لنز و منبع نور می‌باشد. روزنئه جمع کننده، خود آرایه‌ای دو بعدی از روزنئه‌های ورودی است که هریک از این روزندها به طور جداگانه میزان عبور نور را کنترل می‌کند. برای این منظور از ابزار مادوله کننده فضایی نور (SLM)<sup>۷</sup> عبوری به عنوان روزنئه جمع کننده استفاده می‌شود که شدت نور گذرنده را مادوله می‌نماید. در این تحقیق یک نمایشگر کریستال مایع (LCD) شفاف به عنوان SLM بکار گرفته شده است که نور عبوری (بازتاب شده) از جسم را با طرح‌های رندوم (بردارهای  $\varphi$ )

$$X = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi_i = \alpha \Psi \quad (4)$$

اگر بتوان پایه‌ای را پیدا کرد که  $X$  در آن پایه تنها دارای  $k \ll N$  ضریب غیر صفر باشد، گفته می‌شود که بردار  $X$  در این پایه  $k$ -تنک است.

ما در تصویربرداری فشرده به دنبال نمونه‌برداری به تعداد کمتر از ابعاد سیگنال هستیم. به طوری که معادله به شکل زیر تغییر یابد:

$$y_{m \times 1} = \Phi_{m \times n} \times X_{n \times 1} = \Phi_{m \times n} \times \Psi_{n \times n} \times \alpha_{n \times 1} \quad (5)$$

که در حالت  $n < m$  بی‌شمار جواب دارد اما شرط تنک بودن  $\alpha_{n \times 1}$  مجموعه جوابها را محدود می‌کند و ما را قادر به یافتن جواب یکتا می‌سازد.

بدین ترتیب برای بازیابی  $X$  با یکی از کمترین ضریب غیر صفر را پیدا کرد بطوری که در معادله زیر صدق کند.

$$\min\{i : \alpha(i) \neq 0\} \text{ st } y_{m \times 1} = \Phi_{m \times n} \times \Psi_{n \times n} \times \alpha_{n \times 1} \quad (6)$$

عبارت  $\{\}$  بیانگر تعداد اعضای غیر صفر بردار  $\alpha$  است و همان چیزی است که به عنوان نرم  $\| \cdot \|_0$  شناخته می‌شود. بنابراین معادله (۶) به مسئله کمینه‌سازی زیر بدل می‌شود:

$$\arg \min \|\alpha\|_{l_0} \text{ st } y_{m \times 1} = \Phi_{m \times n} \times \Psi_{n \times n} \times \alpha_{n \times 1} \quad (7)$$

$\| \cdot \|_{l_0}$  نرم صفر بردار است. از آنجا که نرم صفر محدب نیست، یافتن این جواب عملی نخواهد بود.

با فرض تنک بودن جواب، یک راه برای حل این معادله تقریب زدن نرم صفر با نرمی از مرتبه بالاتر است که قابلیت کمینه کردن آن امکان‌پذیر باشد:

$$\arg \min \|\alpha\|_{l_1} \text{ st } y_{m \times 1} = \Phi_{m \times n} \times \Psi_{n \times n} \times \alpha_{n \times 1} \quad (8)$$

حل معادله منجر به بازیابی  $\alpha$  و در نتیجه  $x$  خواهد شد.

این معادله با استفاده از برنامه‌نویسی خطی حل می‌شود. در این مقاله از روتین‌های L1\_Magic [2] استفاده شده است.

نرم  $\| \cdot \|_1$  بردار  $\alpha$  :

$$\|\alpha\|_{l_1} = \sum_i |\alpha_i| \quad (9)$$

که برابر است با مجموع مؤلفه‌های آن بردار، از آنجا که بردار  $\alpha$  برداری  $k$ -تنک است برابر با مجموع مؤلفه‌های غیر صفر آن بردار است.

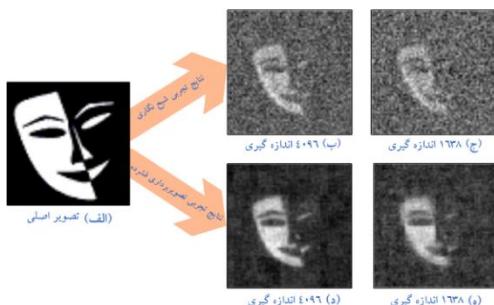
<sup>۷</sup> Spatial light modulator

<sup>\*</sup> Wavelet

شیخ‌نگاری با (ب) ۴۰۹۶ و (ج) ۱۶۳۸ (۴۰٪/N) اندازه‌گیری. تصویر شبیه‌سازی شده به روش نمونه برداری فشرده با (د) ۴۰۹۶ و (ه) ۱۶۳۸ (۵٪/N) اندازه‌گیری. اندازه‌گیری‌های تصویربرداری فشرده با پایه‌های رندوم و بازیابی تصویر در پایه‌های موجک انجام شده است.

## ۵- نتایج تجربی

نتایج تجربی در شکل (۳) نشان داده شده است. چنانچه از مقایسه کمیت CNR محاسبه شده برای تصاویر (ب) تا (ه) شکل (۳) که به ترتیب مقادیر ۲,۹، ۱,۹۶، ۰,۹۶ و ۰,۸ هستند، بر می‌آید تصویربرداری به روش نمونه برداری فشرده در عمل، با نمونه برداری کمتر نسبت به روش شیخ‌نگاری، تصویری با کیفیت بالاتر حاصل شده است.



شکل ۳: نمونه برداری های تجربی، معادل شکل (۲).

## ۶- نتیجه گیری

با توجه به نتایج به دست آمده، نشان داده شد که روش سنجش فشرده (CS) با بهینه سازی نرم اول و انتخاب دو پایه غیرهمدوس برای اندازه گیری و بازیابی تصویر، می تواند با تعداد اندازه گیری کمتر نسبت به تعداد پیکسل های تصویر، تصویری با کیفیت مطلوب تر را بازیابی نماید.

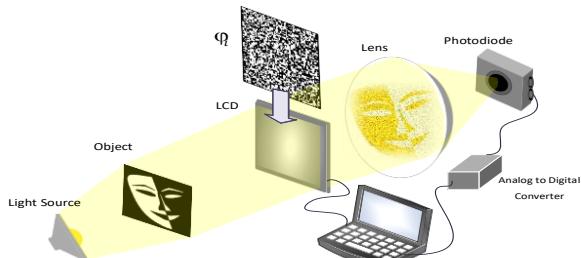
## سپاسگزاری

بدین وسیله از استاد گرامی جناب آقای دکتر محمد خرمی و مهندس محمد شالباف بابت همکاریها و راهنمایی های مفیدشان صمیمانه سپاسگزارم.

## مراجع

- [1] J. Romberg, "Imaging via compressive sampling", IEEE Signal Processing Magazine, vol 25, no 2, pp. 14 - 20, 2008.
- [2] <https://statweb.stanford.edu/~candes/l1magic/>
- [3] Sun B, Welsh S S, Edgar M P, Shapiro J H and Padgett M, "Normalized ghost imaging" Opt. Express, Vol. 20, No. 15, 2012.[3] M. F.
- [4] Duarte, M. A. Davenport, D. Takhar, J. N. Laska, T. Sun, K. F. Kelly, and R. G. Baraniuk, "Single-pixel imaging via compressive sampling", IEEE Signal Process. Mag., vol. 25, no. 2, pp. 83-91, 2008.

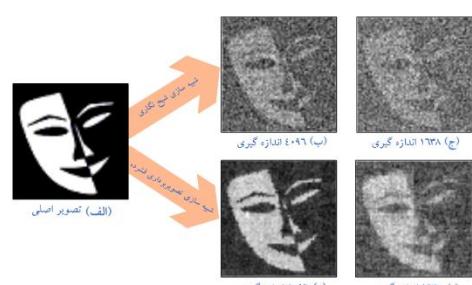
مادوله می کند [4]. سپس نور مادوله شده توسط لنز بر فوتودیود مرکز می یابد. سیگنال های دریافت شده توسط فوتودیود با یک مبدل آنالوگ به دیجیتال به صورت دیجیتالی ثبت می گردد. سیگنال های دیجیتال، بردار اندازه گیری یا را تشکیل می دهد.



شکل ۱: چیدمان آزمایشگاهی تصویربرداری فشرده. طرح های رندوم توسط LCD نمایش داده شده و نور را مادوله می کنند.

## ۴- نتایج شبیه سازی

شبیه سازی تصویربرداری فشرده و شیخ‌نگاری در شکل (۲) نمایش داده شده با این توضیح که برای مقایسه کمی کیفیت تصاویر از کمیتی به نام CNR استفاده گردیده است. این کمیت برای محاسبه میزان کنترast و تخمین نویز به صورت نسبت اختلاف شدت سیگنال های دو ناحیه دلخواه از تصویر به نویز تعریف می شود. برای محاسبه این کمیت یک قسمت تاریک و یک قسمت روشن به عنوان نواحی دلخواه و همچنین نویز به صورت واریانس قسمت تاریک در نظر گرفته می شوند. کمیت CNR برای تصاویر (ب) تا (ه) شکل (۲) به ترتیب ۱,۷, ۰,۸۶, ۰,۸۶ و ۰,۵ به دست می آید که نشان می دهد، تصویر برداری به روش نمونه برداری فشرده در مقایسه با همان تعداد نمونه برداری به روش شیخ‌نگاری، کیفیت بهتری را ارائه می دهد. در این شبیه سازی از طرح های رندوم برای شبیه سازی استفاده شد که این خود باعث ایجاد نویز در تصویر نهایی می شود. پیش بینی می شود در صورت استفاده از پایه های متعامد (غیرهمدوس با موجک) این نویز به حداقل برسد.



شکل ۲: شبیه سازی تصویربرداری فشرده از تصویر با رزولوشن ۶۴×۶۴ (N=4096)، (الف) تصویر اصلی. تصویر شبیه سازی شده به روش