

دینامیک درهم‌تنیدگی مجموعه‌ای از کیوبیت‌ها در برهم‌کنش با کاواک اتلافی

علیرضا نورمندی‌پور^(۱)؛ مرتضی رفیعی^(۲)؛ محمدکاظم توسلی^{(۱)،(۳)}

^(۱) گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

^(۲) دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

^(۳) گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده - در این مقاله درهم‌تنیدگی دودویی بین دو کیوبیت در یک سامانه شامل یک کاواک اتلافی که در آن تعداد دلخواهی کیوبیت قرار دارد را بررسی می‌کنیم. برای مدل کردن اتلاف در این سامانه از رهیافت گاردینر-کولت استفاده می‌کنیم. با حل معادله وابسته به زمان شرودینگر، شکل تحلیلی تابع موج سامانه با در نظر گرفتن حالت اولیه به صورت برهم‌نهی از تک‌برانگیختگی ازدو کیوبیت دلخواه دست می‌آید. در نهایت، دینامیک درهم‌تنیدگی بین هر دو کیوبیت برای تعداد متفاوتی از کیوبیت‌ها در رژیم‌های مختلف برهم‌کنش مورد بررسی قرار گرفته است.

کلید واژه - سامانه‌های اتلافی، هامیلتونی گاردینر-کولت، درهم‌تنیدگی کوانتومی.

Dynamics of Entanglement of a Collective of Qubits Interacting with a Dissipative Cavity

A. Nourmandipour⁽¹⁾; MortezaRafiee⁽²⁾; M. K. Tavassoly^{(1),(3)}

⁽¹⁾ Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

⁽²⁾ Department of Physics, Shahrood University of Technology, Shahrood

⁽³⁾ Photonic & Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

Abstract- In this paper, the pairwise entanglement of two qubits in a system consists of a dissipative cavity with an arbitrary number of qubits is investigated. To model the dissipation in this cavity, the Gardiner-Collett approach has been utilized. The analytical expression of the wave function of the system is obtained by solving the time-dependent Schrödinger equation with the initial state as a superposition of single-excitation of two arbitrary qubits. Entanglement dynamics of any two qubits for different number of qubits and various coupling regimes has been investigated.

Keywords: Dissipative systems, Gardiner-Collett Hamiltonian, Quantum Entanglement

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

درهم‌تنیدگی یکی از جالب‌ترین جنبه‌های مکانیک کوانتومی است که توسط هیچ نظریه موضعی کلاسیکی توصیف نمی‌شود [۱]. در ابتدای ظهور نظریه اطلاعات کوانتومی، چنین به نظر می‌رسید که درهم‌تنیدگی در حضور محیط اتلافی بسیار شکننده است. اما اخیراً این ایده مطرح شده‌است که محیط اطراف در شرایطی تنها می‌تواند نقش سازنده‌ای در ایجاد درهم‌تنیدگی داشته باشد بلکه می‌تواند حالت‌های پایدار از درهم‌تنیدگی به‌وجود بیاورد. این مطلب برای سامانه‌های شامل دو کیوبیت در یک کاواک اتلافی نشان داده شده است [۲،۳]. در این مقاله، دینامیک درهم‌تنیدگی برای تعداد دلخواهی از کیوبیت‌ها که با یک محیط اتلافی مشترک برهم‌کنش می‌کنند رابه‌دست می‌آوریم. نتایج به‌صورت تابعی از زمان همبستگی محیط برای جفت‌شدگی‌های قوی و ضعیف به-ترتیب متناظر با رژیم کاواک خوب و بد بیان می‌شوند. نشان خواهیم داد که محیط اتلافی می‌تواند درهم‌تنیدگی را بین تعداد دلخواهی از کیوبیت‌ها ایجاد کند و حتی منجر به تولید حالت‌های پایای درهم‌تنیده شود. نتایج نشان می‌دهند که در صورتی که ثابت جفت‌شدگی بین اتم‌ها و میدان کاواک برای همه‌ی اتم‌ها یکسان باشد، حالت پایدار درهم‌تنیده به این پارامتر بستگی ندارد و فقط به تعداد زیرسامانه‌ها و شرایط اولیه بستگی دارد.

۲- مدل

سامانه مورد نظر ما شامل n کیوبیت با فضای هیلبرت $H = C^{2 \otimes n}$ است که با یک محیط اتلافی برهم‌کنش می‌کند. فرض می‌کنیم که $\{|0\rangle, |1\rangle\}^{\otimes n}$ پایه‌های متعامد بهنجار باشند که در آن $|0\rangle$ حالت پایه (برانگیخته) تک‌کیوبیتی است. برای مدل کردن کاواک اتلافی، فرض می‌کنیم که کیوبیت‌ها با میدان کاواک برهم‌کنش کنند. ارتباط بین کاواک و محیط پیرامون نیز از طریق برهم‌کنش بین میدان کاواک و میدان پیوسته خارجی بیان می‌شود. در واقع فرض کرده‌ایم که نشت تابش الکترومغناطیسی تنها منبع اتلاف باشد، به نحوی که، فوتون در کاواک به یک مجموعه از حالت‌های پیوسته نشت کند. این روش به رهیافت گاردینر-کولت معروف

است [۴]. با توجه به توضیحات بالا، هامیلتونی مناسب برای سامانه معرفی شده برابر است با:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^n \omega_{qb} \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(i)} + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \int_0^\infty \eta \hat{B}^\dagger(\eta) \hat{B}(\eta) d\eta + \int_0^\infty \left(G(\eta) \hat{a}^\dagger \hat{B}(\eta) + \text{H.c.} \right) d\eta + \sum_{i=1}^n \left(g_i \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{a} + \text{H.c.} \right) \quad (1)$$

در این روابط $\hat{B}(\eta)$ عملگر نابودی محیط پیوسته خارجی باسامد η است. هم‌چنین ω_{qb} بسامد تشدید است که برای همه کیوبیت‌ها یکسان فرض شده‌است، ω_c بسامد میدان در کاواک، g_i جفت‌شدگی بین کیوبیت i ام و میدان کاواک و G جفت‌شدگی بین میدان و محیط است که برابر $G = \sqrt{\kappa/\pi}$ فرض می‌شود (κ نرخ واپاشی است). این مدل منجر به یک چگالی طیفی لورنتسی می‌شود که بیانگر بازتاب‌پذیری غیر ایده‌آل در آینه‌های کاواک است. در نوشتن رابطه‌ی (۱)، فرض شده‌است که هیچ برهم-کنشی بین کیوبیت‌ها وجود نداشته باشد. با استفاده از سازوکار معرفی شده توسط فانو، هامیلتونی (۱) را می‌توان به‌صورت زیر ساده کرد [۲،۵]:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^n \omega_{qb} \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(i)} + \int_{-\infty}^\infty \omega \hat{A}^\dagger(\omega) \hat{A}(\omega) d\omega + g \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^\infty \left(\alpha^*(\omega) \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{A}(\omega) + \text{H.c.} \right) d\omega, \quad (2)$$

که در آن ثابت جفت‌شدگی برای تمام اتم‌ها یکسان و برابر g در نظر گرفته شده‌است. در این رابطه عملگرهای پوشاننده $\hat{A}(\omega)$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\hat{A}(\omega) \equiv \alpha(\omega) \hat{a} + \int_{-\infty}^\infty \beta(\omega, \eta) \hat{B}(\eta) d\eta, \quad (3)$$

که در آن

$$\alpha(\omega) = \frac{\sqrt{\kappa/\pi}}{\omega - \omega_c + i\kappa} \quad (4\text{الف})$$

$$\beta(\omega, \eta) = \sqrt{\kappa/\pi} \alpha(\omega) \left[P \frac{1}{\omega - \eta} + \frac{\omega - \omega_c}{\kappa/\pi} \delta(\omega - \omega_c) \right] \quad (4\text{ب})$$

که در آن P بیانگر مقدار اصلی است.

۳- تحول زمانی حالت درهم‌تنیده سامانه

حال فرض می‌کنیم که حالت اولیه سامانه به صورت زیر باشد:

$$|\psi_0\rangle = (c_{01}|1_k\rangle + c_{02}|1_l\rangle) |0\rangle_R, \quad (5)$$

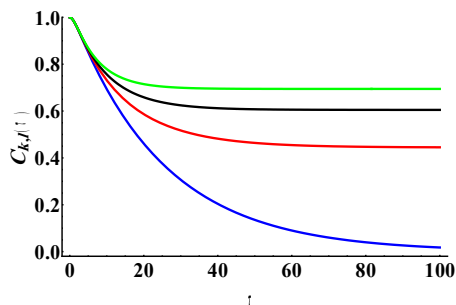
ب) درهم‌تنیدگی بین کیوبیت k ام و کیوبیت l ام (که در ابتدا در حالت پایه قرار دارد). تلاقی متناظر برابر است با:

$$C_{k,l}(t) = \frac{2}{\sqrt{n-2}} |u_1(t) u_3(t)| \quad (11)$$

ج) و نهایتاً درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت نوعی l ام و m ام که در ابتدا در حالت پایه قرار دارند. در این حالت تلاقی برابر است با:

$$C_{j,m}(t) = \frac{2}{n-2} |u_3(t)|^2 \quad (12)$$

در ادامه، با معرفی دو پارامتر بدون بعد $R = \frac{g}{\kappa}$ و $\tau = \kappa t$ خواهیم توانست تحول زمانی درهم‌تنیدگی‌های مختلف را برای دو رژیم متناظر با کاواک خوب ($R \gg 1$) و کاواک بد ($R \ll 1$) بررسی کنیم. شکل‌های ۱ و ۲ تحول زمانی $C_{k,l}(\tau)$ را به ترتیب در رژیم‌های کاواک بد ($R = 0.1$) و خوب ($R = 10$) برای $s = \varphi = 0$ به ازای مقادیر مختلف n نشان می‌دهند. نتایج ارائه شده در شکل ۱ نشان دهنده درهم‌تنیدگی پایایی بیشتر به ازای مقادیر بزرگتر n است. ویژگی قابل توجه این است که درهم‌تنیدگی اولیه بین دو کیوبیت در برهم‌کنش با محیط به ازای $n = 2$ به مرور از بین رفته، امامی‌توان درهم‌تنیدگی ذخیره شده بین دو کیوبیت k و l را با افزایش تعداد کیوبیت‌ها حفظ کرد. چنین رفتاری در رژیم برهم‌کنش قوی نیز مشاهده می‌شود. اما در این مورد، معیار تلاقی یک رفتار نوسانی نیز دارد، به طوری که هرگز ناگهانی درهم‌تنیدگی برای $n = 2$ نیز دیده می‌شود (شکل ۲).



شکل ۱: $C_{k,l}(\tau)$ به صورت تابعی از τ برای $R = 0.1$ و $s = \varphi = 0$ به ازای $n = 2$ (خط آبی)، $n = 6$ (خط مشکی)، $n = 9$ (خط قرمز) و $n = 12$ (خط سبز).

که در آن $|0\rangle_R$ و $|1_i\rangle \equiv |0_1, \dots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \dots, 0_n\rangle$ حالت خلاء چندمدی برای کاواک اتلافی است. در اینجا فرض می‌کنیم:

$$c_{01} = \sqrt{\frac{1-s}{2}}, \quad c_{02} = \sqrt{\frac{1+s}{2}} e^{i\varphi} \quad (6)$$

که در آن s پارامتر جدپذیری است به طوری که $0 \leq s \leq 1$. با توجه به فرض تک‌برانگیختگی در کاواک، حالت سامانه در زمان t را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$|\psi(t)\rangle = (c_1(t)|1_k\rangle + c_2(t)|1_l\rangle + c_3(t)|E_{kl}\rangle)|0\rangle_R + \int c_\omega(t)|1_\omega\rangle|G\rangle d\omega \quad (7)$$

که در آن $|G\rangle = |0\rangle^{\otimes n}$ و $|E_{kl}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sum_{i \neq k,l} |1_i\rangle$. با استفاده از معادله وابسته به زمان شرودینگر، و در نظر گرفتن شرط تشدید و استفاده از روش تبدیلات لاپلاس، می‌توان روابط زیر را برای ضرایب بسط بدست آورد:

$$u_1(t) = \frac{(n-1)c_{01} - c_{02}}{n} + \frac{c_{01} + c_{02}}{n} \Lambda(t), \quad (8\text{الف})$$

$$u_2(t) = \frac{(n-1)c_{02} - c_{01}}{n} + \frac{c_{01} + c_{02}}{n} \Lambda(t), \quad (8\text{ب})$$

$$u_3(t) = \frac{\sqrt{n-2}}{n} (c_{01} + c_{02}) (-1 + \Lambda(t)), \quad (8\text{ج})$$

که در آن

$$u_j(t) = c_j(t) e^{i\omega_{qb}t}, \quad (9\text{الف})$$

$$\Lambda(t) = e^{-\kappa t/2} \left(\cosh(\Omega_n t/2) + \frac{\kappa}{\Omega_n} \sinh(\Omega_n t/2) \right), \quad (9\text{ب})$$

$$\Omega_n = \sqrt{\kappa^2 - 4ng^2}. \quad (9\text{ج})$$

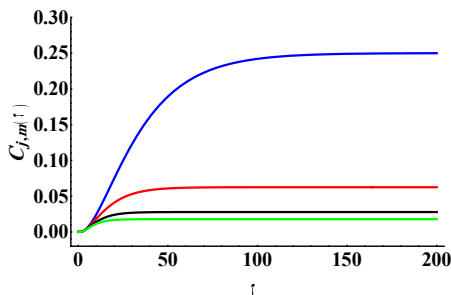
۴- درهم‌تنیدگی

برای بررسی میزان درهم‌تنیدگی دودویی (که به سه صورت مختلف قابل مشاهده است) از معیار تلاقی استفاده می‌کنیم [۶].

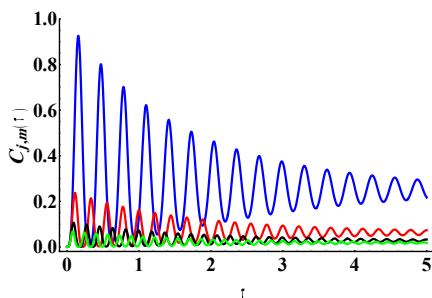
ا) درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های k ام و l ام (که در ابتدا در یک ترکیب خطی از حالت‌های برانگیخته قرار دارند). ماتریس چگالی کاهش‌یافته متناظر از گرفتن رد روی مولفه‌های محیط و تمام کیوبیت‌های دیگر به دست می‌آید. در این مورد تلاقی متناظر برابر است با:

$$C_{k,l}(t) = 2|u_1(t) u_2(t)| \quad (10)$$

دست آوردیم. به منظور بررسی میزان درهم‌تنیدگی‌های مختلف دودویی، معیار تلاقی را به کار بردیم. نتایج نشان می‌دهند که محیط پیرامون نه تنها باعث ایجاد درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های مختلف می‌شود، بلکه یک حالت پایای درهم‌تنیده نیز به وجود می‌آید به طوری که این حالت پایا به خصوصیات محیط اطراف بستگی ندارد. در رژیم برهم‌کنش قوی، حافظه طولانی مدت محیط اطراف، احیا و نوسانات درهم‌تنیدگی را القاء می‌کند. نتایج به دست آمده را می‌توان با کمی دست‌کاری در آزمایش کاواک‌های QED با اتم‌ها (یا یون‌ها)ی محصور در یک کاواک الکترومغناطیسی [۷] و همچنین در مدارهای ابررسانایی [۸] آزمایش و تایید کرد.



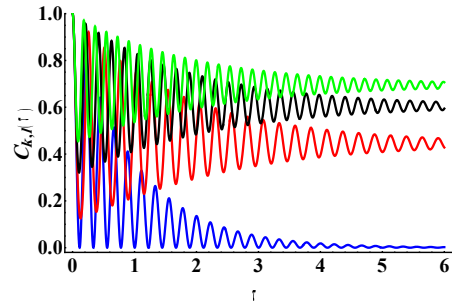
شکل ۳: $C_{j,m}(\tau)$ به عنوان تابعی از τ برای $R=0.1$ و $s=\varphi=0$ به ازای $n=4$ (خط آبی)، $n=8$ (خط مشکی)، $n=12$ (خط قرمز) و $n=15$ (خط سبز).



شکل ۴: $C_{j,m}(\tau)$ به عنوان تابعی از τ برای $R=10$ و $s=\varphi=0$ به ازای $n=4$ (خط آبی)، $n=8$ (خط مشکی)، $n=12$ (خط قرمز) و $n=15$ (خط سبز).

مراجع

- [1] F. Benatti, R. Floreanini, and M. Piani, Phys. Rev. Lett. **91**, 070402, 2003.
- [2] A. Nourmandipour, M.K. Tavassoly, J. Phys. B **48**, 165502, 2015.
- [3] S. Maniscalco, et.al., Phys. Rev. Lett. **100**, 090503, 2008.
- [4] M.J. Collett, C.W. Gardiner, Phys. Rev. A **30**, 1386, 1984.
- [5] U. Fano, Phys. Rev. **124**, 1866, 1961.
- [6] K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2248, 1998.
- [7] G. R. Guthohrlein, et.al., Nature (London), **414**, 49, 2001.
- [8] A. Wallraff, et.al., Nature (London), **431**, 162, 2004.



شکل ۵: $C_{k,l}(\tau)$ به صورت تابعی از τ برای $R=10$ و $s=\varphi=0$ به ازای $n=2$ (خط آبی)، $n=6$ (خط مشکی)، $n=9$ (خط قرمز) و $n=12$ (خط سبز).

شکل‌های ۳ و ۴ تحول زمانی درهم‌تنیدگی دودویی $C_{j,m}(\tau)$ را به ترتیب در رژیم‌های کاواک بد ($R=0.1$) و خوب ($R=10$) برای $s=\varphi=0$ به ازای مقادیر مختلف n نشان می‌دهند. در رژیم برهم‌کنش ضعیف، تلاقی از مقدار صفر شروع شده و به طور یکنواخت تا مقدار پایا افزایش می‌یابد. در رژیم برهم‌کنش قوی رفتار نوسانی درهم‌تنیدگی به وضوح دیده می‌شود. این رفتار نوسانی باعث می‌شود که در این رژیم بتوان به مقادیر بیشتری از حالت پایای درهم‌تنیدگی دست یافت. برای $n \neq 2$ مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی نیز مشاهده می‌شود.

از بررسی نمودارهای مختلف در رژیم‌های برهم‌کنشی متفاوت (نمودارهای ۱-۴) می‌توان نتیجه گرفت که مقدار پایای درهم‌تنیدگی به جفت‌شدگی بین کیوبیت‌ها و میدان کاواک بستگی ندارد و فقط به اندازه سامانه و شرایط اولیه بستگی دارد. این مطلب از معادلات (۷) نیز برداشت می‌شود. در این روابط $\Lambda(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ و ضرایب بسط فقط به n و شرایط اولیه بستگی پیدا می‌کنند. از طرفی با مقایسه شکل‌های ۱ و ۳ (به طور متناظر ۲ و ۴) واضح است که مقدار پایای درهم‌تنیدگی $C_{j,m}(\infty)$ در مقایسه با $C_{k,l}(\infty)$ ناچیز است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی یک سامانه شامل تعداد دلخواه کیوبیت که با یک محیط مشترک برهم‌کنش می‌کنند را بررسی کرده‌ایم. با محدود کردن تعداد برانگیختگی‌های حالت اولیه کیوبیتی و سپس با حل معادله شرودینگر، تابع موج سامانه را به طور دقیق به-