بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

بررسی فاز هندسی بین دو کیوبیت بر حسب فاصله با استفاده از مدل کالگرو-موزر

امنیت طلب، مهدی؛ رنگانی جهرمی، حسین؛ عباسی، لیلا
گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، *صندوق پستی ۱۶۵، ارومیه*

چکیده

در این مقاله تغییرات فاز هندسی برای یک سیستم دو کیوبیتی بر حسب فاصله بین کیوبیت ها، هنگامی که کیوبیت ها تحت تاثیر میدان های مغناطیسی مختلف می‌باشند، در مدل XX هایزنبرگ همراه با اندرکنش دژایلوشنسکی- موریا (DM) مورد مطالعه قرار می گیرد. نشان داده خواهد شد که وقتی جفت شدگی تبادلی همسانگرد (J) را در دو مدل کالگرو – موزر بررسی کنیم، فاز هندسی برای سیستم مذکور می تواند با افزایش فاصله بین کیوبیت ها افزایش یافته و به یک نقطه ی بیشینه برسد و احتمالا پس از یک افت کوتاه برای فواصل طولانی بدون تغییر بماند. هم چنین نشان داده خواهد شد که افزایش اندازه میدان، باعث کاهش فاز هندسی بر حسب فاصله می شود.

کلید واژه- فاز هندسی، کیوبیت، مدل کالگرو موزر

Studying the geometric phase for a two-qubit model in terms of distance

Amniat-Talab, Mahdi; Rangani Jahromi, Hossein; Abbasi, Leyla

Department of Physics, Faculty of sciences, Urmia University, P. B. 165, Urmia, Iran

Abstract

We study the variation of geometric phase with distance for a two spin-1/2 system with Dzyaloshinskii-Moriya (DM) interaction, while one of the spins is driven by a time-varing rotating magnetic field and the other one is coupled with a static magnetic field. It is shown that when we consider the spin-spin coupling coefficient in the form of the Calogero-Moser types, the geometric phase can increase with the distance and reach a peak; then it maybe decreases for a short distance and will be unchanged for very long distances. Moreover, increasing the amount of magnetic field causes the decrease of geometric phase in terms of the distance.

Keywords: Geometric phase, qubit, the Calogero-Moser model

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-14]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

1- مقدمه

در سال ۱۹۸۴ فاز هندسی توسط بری[۱] فرمول‌بندی و بسط یافت [۱]. وی ضرائب فازی که در تغییرات بی‌دررو[۲] چرخه‌ای ایجاد می‌شوند را به شکل کامل توضیح داد. این فاز هندسی بی‌دررو چرخه‌ای به فاز بری معروف می‌باشد. با توجه به کاربردهای بسیار فاز هندسی در حوزه‌های مختلف فیزیک از جمله در سیستم‌های مختلف کوانتومی [۲]، سیستم‌های اپتیکی [۳] و... یک نقطه نظر جدید در نظریه مکانیک کوانتومی به‌وجود آمده است. اخیراً فازهای هندسی برای محاسبات کوانتومی[۳] [۴] پیشنهاد شده است، که یکی از مهم‌ترین کاربردهای آن می‌باشد. همچنین فاز هندسی درتغییرات غیربی‌دررو [۵] و غیر چرخه‌ای [۶] نیز ظاهر شده است. در این مقاله مدل XX هایزنبرگ که حالت خاصی از مدل XXZ می‌باشد همراه با اندرکنش دزایلوشنسکی- موریا[۴] (DM) ومیدان‌های مغناطیسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این سیستم بعد از بدست آوردن ویژه مقادیر و ویژه بردارهای هامیلتونی سیستم، فازهای بری تولید شده بعد از تغییر بی‌دررو و چرخه‌ای هامیلتونی، محاسبه می‌شود. سپس تغییرات فاز را در دو مدل کالگرو موزر بررسی خواهیم کرد.

۲- مدل و معادلات اساسی

ابتدا سیستمی با دو اسپین $1/2$ (دو کیوبیتی)، که یکی از اسپین‌ها تحت تاثیر میدان مغناطیسی چرخان در صفحه $x-y$ و دیگری تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی ثابت با زمان در راستای محور z، در نظر می‌گیریم. با انتخاب مدل XX هایزنبرگ همراه با اندرکنش DM، هامیلتونی برای چنین سیستمی بصورت زیر نوشته می‌شود [7]:

$$H = J(\sigma_1^x\sigma_2^x + \sigma_1^y\sigma_2^y) + \vec{B}_1.\vec{\sigma}_1 + \vec{B}_2.\vec{\sigma}_2 + \vec{D}.(\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2) \quad (۱)$$

در رابطه (۱)، J ضریب جفت‌شدگی اسپین- اسپین می‌باشد که این مدل برای $J\rangle 0$، آنتی فرومغناطیس و برای $J\langle 0$، فرومغناطیس‌نامیده می‌شود. $\vec{\sigma}_j = (\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z)$ $j=(1,2)$ ماتریس‌های پائولی زیر سیستم‌ها و $\vec{D}.(\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2)$ جمله اندرکنش DM است که از جفت‌شدگی اسپین-مدار به‌وجود می‌آید. همچنین $\vec{B}_1 = B_1\,\hat{z}$ و $\vec{B}_2 = B_2\,\hat{n}$ میدان‌های مغناطیسی خارجی با اندازه ثابت هستند که به ترتیب با اسپین ۱و اسپین ۲ اندرکنش می‌کنند و $\vec{B}_2$ میدان مغناطیسی چرخان در صفحه $x-y$ می‌باشد با انتخاب $\hat{n} = (\cos\phi(t)\ , \sin\phi(t)\ ,0)$ ، که ϕ آهسته از 0 تا $\phi(t=T) = 2\pi$ تغییر می‌کند (شرط بی‌دررو و چرخه‌ای)، هامیلتونی توصیف کننده این سیستم به شکل زیر خواهد شد:

$$H = J(\sigma_1^x\sigma_2^x + \sigma_1^y\sigma_2^y) + B_1\,\sigma_1^z + B_2(\cos\phi\,\sigma_2^x + \sin\phi\sigma_2^y) + D(\sigma_1^x\sigma_2^y - \sigma_1^y\sigma_2^x) \quad (۱)$$

در رابطه بالا $\vec{D} = D\,\hat{z}$ انتخاب می‌کنیم.

باتعریف‌پایه‌های استاندارد $(|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle)$، شکل ماتریسی هامیلتونی مطابق رابطه زیر می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} B_1 & B_2\exp(-i\phi) & 0 & 0 \\ B_2\exp(i\phi) & B_1 & 2J+2iD & 0 \\ 0 & 2J-2iD & -B_1 & B_2\exp(-i\phi) \\ 0 & 0 & B_2\exp(i\phi) & -B_1 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

برای سادگی $B_2 = 1$ و $d = 2(J+iD)$ قرار می دهیم، لذا هامیلتونی به شکل زیر ساده می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} B_1 & \exp(-i\phi) & 0 & 0 \\ \exp(i\phi) & B_1 & d & 0 \\ 0 & \bar{d} & -B_1 & \exp(-i\phi) \\ 0 & 0 & \exp(i\phi) & -B_1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

ویژه مقادیر این هامیلتونی عبارتند از:

$$E_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2|k|^2 + 2|d|^2 + 4B_1{}^2 + 4} \quad (۵\text{-الف})$$

$$E_{3,4} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-2|k|^2 + 2|d|^2 + 4B_1{}^2 + 4} \quad (۵\text{-ب})$$

که در روابط بالا از متغیرهای مستقل از زمان بصورت زیر استفاده شده است:

$$|k|^2 = \sqrt{16B_1{}^2 + 4|d|^2 + |d|^4}$$

$$k_{1,2} = 2E_{1,2}(|d|^2 - |k|^2) + 2B_1|k|^2 + 8B_1 - 2B_1|d|^2$$

$$k_{3,4} = 2E_{3,4}(|d|^2 + |k|^2) - 2B_1|k|^2 + 8B_1 - 2B_1|d|^2$$

پس از محاسبات پیچیده، ویژه حالت‌های متناظر با ویژه مقادیر H نیز به صورت ذیل بدست می‌آیند:

$$|\Phi_j(t)\rangle = N_j \begin{bmatrix} F_j\exp(-2i\phi(t)) \\ M_j\exp(-i\phi(t)) \\ G_j\exp(-i\phi(t)) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (j=1,2,3,4) \quad (۶)$$

که داریم:

$$F_j = \frac{-4d}{k_j} \quad (۷\text{-الف})$$

۱. Berry
۲. Adiabatic evolution
۳. Quantum computation
۳. Adiabatic evolution
۴. Dzyaloshinki-Moriya

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-14]

$$M_j = \frac{4d(B_1 - E_j)}{k_j} \qquad (۷-ب)$$

$$G_{1,2} = \frac{-2(|d|^2 + |k|^2 + 4B_1^2 - 4E_{1,2}B_1)}{k_{1,2}} \qquad (۷-پ)$$

$$G_{3,4} = \frac{-2(|d|^2 - |k|^2 + 4B_1^2 - 4E_{3,4}B_1)}{k_{3,4}} \qquad (۷-ت)$$

در رابطه (۶)، N_j، ضریب بهنجارش برای j امین ویژه مقدار می‌باشد.

۳- فاز بری

هامیلتونی سیستمی، با پارامتر وابسته به زمان $R(t)$ که ویژه حالت nام آن $|n(R(t))\rangle$ می‌باشد، در معادله ویژه مقداری زیر صدق می‌کند:

$$H(R(t))\,|n(R(t))\rangle = E_n\,|n(R(t))\rangle \qquad (۸)$$

معادله شرودینگر وابسته به زمان که کت حالت انرژی، از آن تبعیت می‌کند، مطابق رابطه زیر می‌باشد:

$$H(R(t))\,|n(R(t))\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|n(R(t))\rangle \qquad (۹)$$

اگر تغییرات $R(t)$ به حد کافی کند باشد، طبق قضیه بی-دررو انتظار داریم که $|n(R_0), t_0 = 0; t\rangle$ متناظر با ویژه بردار nام انرژی، $|n(R(t))\rangle$ از هامیلتونی $H(R(t))$ در زمان t باشد. بنابراین داریم:

$$|n((R_0), t_0 = 0; t\rangle = \exp\{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t'))\,dt'\} \times \exp(i\gamma_n(t))\,|n(R(t))\rangle \qquad (۱۰)$$

ضریب اول در طرف راست رابطه بالا فاز دینامیکی است، از طرف دیگر با جای‌گذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۹)، ضریب فازی دوم که معادل با فاز هندسی بری هست، بدست می-آید:

$$\gamma_n(t) = i\int_{R_0}^{R(t)} \langle n(R(t'))|\nabla_R n(R(t'))\rangle\, dR(t') \qquad (۱۱)$$

در رابطه بالا مسیر انتگرال مشابه مسیر فرایند بی‌درروی است که پارامتر خارجی R از R_0 تا $R(t)$ تغییر کرده است.

در این مقاله فاز بری وقتی که سیستم تحت تاثیر تغییرات بی‌درروی و چرخه‌ای قرار گرفت، به‌وجود می‌آید. با فرض آنکه حالت اولیه سیستم $|\Phi_j(t=0)\rangle$ باشد، فاز بری بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma_j = i\int_0^T \left\langle \Phi_j \left| \frac{d}{dt}\Phi_j \right.\right\rangle dt \qquad (۱۲)$$

با جایگذاری ویژه حالت‌ها، در رابطه (۱۲) داریم:

$$\gamma_j = 2\pi|N_j|^2(2|F_j|^2 + |M_j|^2 + |G_j|^2) \qquad (۱۳)$$

که در رابطه بالا

$$|N_j|^2 = \frac{1}{|F_j|^2 + |M_j|^2 + |G_j|^2 + 1} \qquad (۱۴)$$

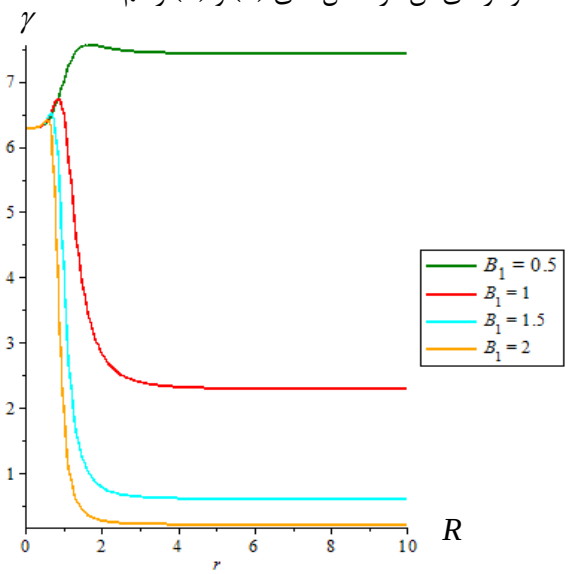
می‌باشد.

۴- مدل کالگرو – موزر[۵] [8]

در یک شبکه اسپینی، مکان واقعی اسپین ها به دلیل تولید فونون ها به طور نوسانی تغییر می کند. در این حالت انتگرال های تبادلی توابعی از مکان بوده و به فاصله بین اسپین ها وابسته اند. لذا مطالعه تغییرات فازهندسی با فاصله دارای‌اهمیت فراوانی است. در این قسمت می خواهیم حالات کوانتومی دو کیوبیت که دارای اندرکنش تبادلی $J(R)$ که وابسته به فاصله بین کیوبیت ها می باشد را مورد بررسی قرار دهیم. به ویژه هدف مطالعه تاثیر این فاصله روی فازهندسی سیستم می باشد. در مدل کالگرو – موزر نوع ۱، $J(R)$ یعنی ضریب اندرکنش تبادلی بین دو ذره را به صورت ذیل در نظر می گیریم:

$$J(R) = \frac{1}{R^2} \qquad (۱۵)$$

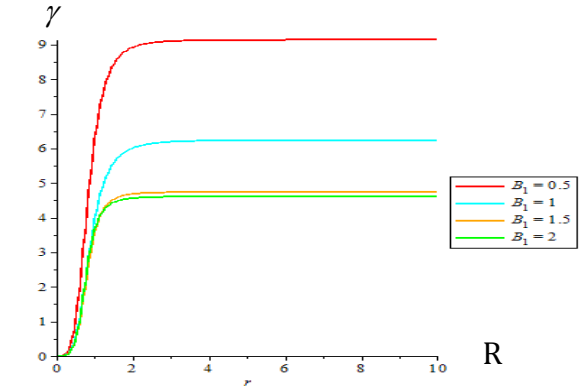
که نمودارهای آن در شکل های (۱) و (۲) رسم شده است.



شکل(۱): تغییرات γ_1 نسبت به R به ازای $D = 0.5$ و $B_2 = 1$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو – موزر نوع ۱

۵. Calogero-Moser model

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-14]

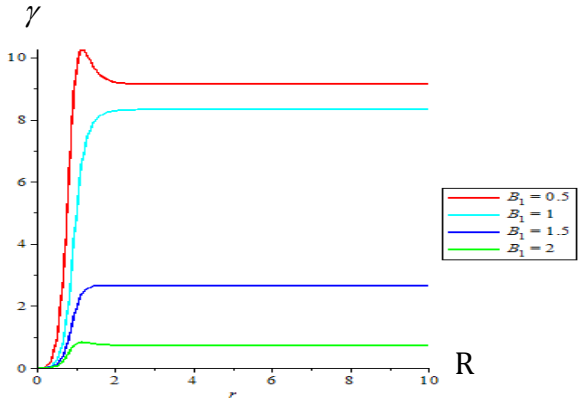


شکل (۲): تغییرات γ_4 نسبت به R به ازای $D=0.5$ ، $B_2=1$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو – موزر نوع ۱.

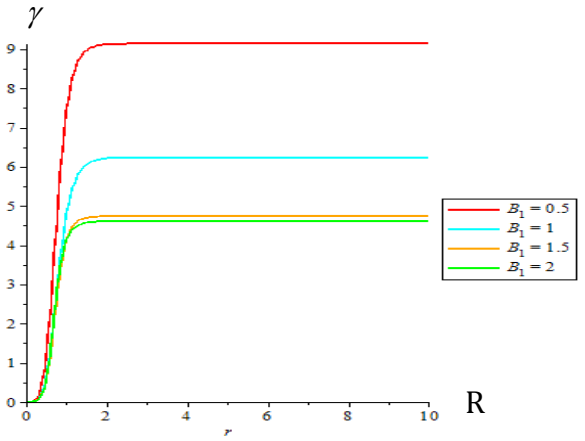
در مدل کالگرو – موزر نوع ۲ نیز $J(R)$ را به صورت ذیل در نظر می گیریم:

$$J(R)=\frac{1}{\sinh^2 R} \qquad (۱۶)$$

که در این مدل نیز فقط نمودارهای γ_3 و γ_4 را بررسی می کنیم (به شکل های (۳) و (۴) دقت شود).



شکل (۳): تغییرات γ_3 نسبت به R به ازای $D=0.5$ ، $B_2=1$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو – موزر نوع 2.



شکل (۴): تغییرات γ_4 نسبت به R به ازای $D=0.5$ ، $B_2=1$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو – موزر نوع 2.

رفتار کلی این نمودارها بدین صورت است که نخست میزان فازهندسی با افزایش فاصله یک سیر صعودی را طی می کند که پس از رسیدن به یک حد بیشینه و احیانا یک کاهش مختصر، ثابت بودن فازهندسی را در فواصل دور شاهد هستیم. برای مثال در شکل (۱) منحنی سبز نشان دهنده γ_1 است که به ازای $D=0.5$ ، $B_2=1$ و $B_1=0.5$ رسم شده است. همانطور که ملاحظه می کنیم، منحنی دارای یک افزایش آرام رو به بالاست که این بدین معنی است که با افزایش R میزان فازهندسی افزایش می یابد و دارای یک بیشینه در $R=1.37$ می باشد که در این نقطه اوج فاز هندسی را داریم و سپس به صورت آرام کاهش یافته و در $R\geq 3.085$ به صورت ثابت در می آید. همچنین مشاهده شود که در حالت γ_4 با افت نمودار مواجه نمی شویم و به ازای $R=1.879$ فاز هندسی ثابت می شود.همچنین در هردو مدل با افزایش میدان، مقدار فازهندسی کاهش می‌یابد.

۵- نتیجه‌گیری

فاز هندسی سیستم دو کیوبیتی با فاصله بین کیوبیت ها، هنگامی که کیوبیت ها تحت تاثیر میدان مغناطیسی مختلف می باشند، در مدل XX هایزنبرگ همراه با اندرکنش دژایلوشنسکی- موریا (DM) مورد مطالعه قرار گرفت. نشان داده شد که تحت دو مدل کالگرو – موزر، فازهندسی با افزایش فاصله یک سیر صعودی را طی می کند که پس از رسیدن به یک حد بیشینه و احیانا یک کاهش مختصر، ثابت بودن فازهندسی را در فواصل دور شاهد هستیم. هم چنین نشان داده شد که افزایش اندازه میدان، باعث کاهش فازهندسی می شود.

مراجع

[۱] M.V. Berry, *Pro. R. Soc. London.* A. **392,** 45(1984).

[۲] A. Shapera, F.Wilczek, Geometric Phases in Physics, World Scientific, Singapore (1989).

[۳] A. Tomita, R. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **57**(1986).

[۴] L.M. Duan, J.I. Cirac, and P. Zoller, *Science* **292**,1695 (2001).

[۵] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1593 (1987).

[۶] J. Samuel and B. Bhandari, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2339 (1988).

[7] M. Amniat-talab, H. Rangani Jahromi, and S. Golkar, Int. J. Theo. Phys. **52**, 163 (2013).

[8] K. Hikami, M. Wadati, J. Phy. Soc. Jpn. **62**, (1993) .

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-14]