



بررسی درهم تنیدگی در سامانه‌های اپتومکانیک جفت‌شده در حضور محیط غیر خطی OPA

نجمه اتحادی ابری^۱، فردین خیراندیش^۱، سیدجواد اخترشناس^۱ و آزاده زارع^۱
^۱ دانشکده علوم، گروه فیزیک دانشگاه اصفهان، خیابان هزار جریب، اصفهان

چکیده - در این پژوهش نظری، به بررسی امکان ایجاد و انتقال درهم تنیدگی میان مدهای مختلف سامانه‌های اپتومکانیکی مشابه که از یکدیگر فاصله دارند و به وسیله فیبر نوری به یکدیگر متصل شده‌اند، در حضور محیط غیر خطی OPA می‌پردازیم. نشان خواهیم داد که وجود محیط غیر خطی در سامانه که باعث افزایش متوسط تعداد فوتون‌ها و در نتیجه افزایش ثابت جفت‌شدگی اپتومکانیکی می‌شود، درهم تنیدگی مدهای مختلف را تحت تأثیر قرار داده و میزان آن را افزایش می‌دهد. علاوه بر این، در حضور غیر خطیت OPA و در مقایسه با سامانه‌های اپتومکانیک برهنه از همین نوع، مقاومت پیشینه درهم تنیدگی سامانه در مقابل دما افزایش خواهد یافت.

کلید واژه - درهم تنیدگی، سامانه‌های اپتومکانیک، محیط غیر خطی OPA.

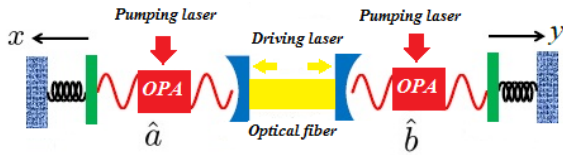
Investigation of Entanglement in Optomechanical Arrays in The Presence of OPA nonlinearity

Najme Ettehad Abari¹, Fardin Kheirandish¹, Seyed Javad Akhtarshenas¹ and Azade Zare¹

¹ Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan

Abstract- In this study, we theoretically investigate the possibility of entanglement generation and swapping between different modes of coupled optomechanical arrays in the presence of OPA nonlinearity. As can be seen, in this setup, the presence of OPA media, which can increase the mean photon number and consequently the optomechanical coupling constant, lead to stronger entanglement between adjacent and distant modes of optomechanical systems in comparison with bare ones. Moreover, by using these nonlinear media, the steady state entanglement between different modes of arrays in stable regime becomes more robust against temperature.

Keywords: Entanglement, Optomechanical systems, Nonlinear OPA medium.



شکل ۱: شمایی از دو سامانه اپتومکانیک جفت شده توسط فیبر نوری

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hbar(\omega_c - \omega_L)(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}) + \frac{\hbar \omega_m}{2}(\hat{q}_1^2 + \hat{p}_1^2) \\ & + \frac{\hbar \omega_m}{2}(\hat{q}_2^2 + \hat{p}_2^2) + i\hbar E[(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) + (\hat{b}^\dagger - \hat{b})] \\ & + \hbar \lambda(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) - \hbar g_0(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{q}_1 + \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{q}_2) \\ & + i\hbar \chi[(e^{i\theta} \hat{a}^{\dagger 2} - e^{-i\theta} \hat{a}^2) + (e^{i\theta} \hat{b}^{\dagger 2} - e^{-i\theta} \hat{b}^2)] \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه فوق، $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}, \hat{b}^\dagger$ عملگرهای خلق و فناى میدان الکترومغناطیسی درون کاواک اول (دوم)، $(\hat{p}_1, \hat{q}_1, \hat{p}_2, \hat{q}_2)$ عملگرهای بدون بعد نسبت داده شده به مد مکانیکی کاواک اول (دوم)، χ ثابت جفت شدگی میان محیط غیرخطی OPA و لیزر تابنده بر آن، θ فاز میدان دمشی بر محیط غیرخطی، λ ثابت جفت شدگی مدهای اپتیکی دو کاواک، $g_0 = \frac{\omega_c}{L} \sqrt{\hbar/m\omega_m}$ ضریب جفت شدگی اپتومکانیکی و $E = \sqrt{2\kappa_c P/\hbar\omega_c}$ کمیت وابسته به میدان لیزر دمشی کاواکهای اپتومکانیکی است که متناسب با توان لیزر (P) و نرخ فرار فوتونها از درون کاواک (κ_c) می باشد.

۱-۲ تحولات سامانه

برای بررسی تحولات دینامیکی عملگرهای سامانه مورد نظر در رژیم اتلافی با استفاده از معادلات لانژون-هایزنبرگ داریم [۵]

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}_1 &= \omega_m \hat{p}_1, & \dot{\hat{q}}_2 &= \omega_m \hat{p}_2 \\ \dot{\hat{p}}_1 &= -\omega_m \hat{q}_1 - \gamma_m \hat{p}_1 + g_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\xi}_1(t) \\ \dot{\hat{p}}_2 &= -\omega_m \hat{q}_2 - \gamma_m \hat{p}_2 + g_0 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{\xi}_2(t) \\ \dot{\hat{a}} &= -(\kappa_c + i\Delta_0)\hat{a} - i\lambda \hat{b} + ig_0 \hat{a} \hat{q}_1 + E \\ &+ 2\chi \hat{a}^\dagger e^{i\theta} + \sqrt{2\kappa_c} \hat{a}_{in} \\ \dot{\hat{b}} &= -(\kappa_c + i\Delta_0)\hat{b} - i\lambda \hat{a} + ig_0 \hat{b} \hat{q}_2 + E \\ &+ 2\chi \hat{b}^\dagger e^{i\theta} + \sqrt{2\kappa_c} \hat{b}_{in} \end{aligned} \quad (3)$$

معادلات فوق، معادلات جفت شده‌ای هستند که در آن‌ها، γ_m ضریب میرایی نوسانگرهای مکانیکی، $\hat{\xi}_1(t)$ عملگر نوفه براونی ناشی از جفت شدگی مدمکانیکی کاواک اول (دوم) با حمام گرمایی اطراف آن، $\Delta_0 = \omega_c - \omega_L$

۱- مقدمه

درهم تنیدگی یکی از پدیده‌های مهم مکانیک کوانتومی بشمار می‌رود که مشاهده آن درجهان ماکروسکوپی، به دلیل جفت شدگی سامانه‌ها با محیط اطراف و ایجاد واهمدوسی به آسانی میسر نمی‌باشد. در سال‌های اخیر، سامانه‌های اپتومکانیک به عنوان سامانه‌های ماکروسکوپی که در ساده‌ترین حالت از یک کاواک اپتیکی با تک آینه‌ای متحرک تشکیل شده‌اند، امکان بررسی اثرات کوانتومی نظیر درهم تنیدگی را میسر ساخته‌اند [۱]. در این سامانه‌ها، نیروی فشارتابشی می‌تواند منجر به حرکت آینه متحرک حول نقطه تعادل و در نتیجه جفت شدگی مدهای مکانیکی و اپتیکی و ایجاد درهم تنیدگی میان آن‌ها شود. در این پژوهش به بررسی درهم تنیدگی در سامانه‌های اپتومکانیکی جفت شده اتلافی در حضور محیط غیرخطی تقویت کننده پارامتریک اپتیکی (OPA) می‌پردازیم. در بخش اول برپایش فیزیکی سامانه رابیان کرده و در بخش دوم تحولات آن را بررسی می‌کنیم و در انتها نیز خواهیم دید که چگونه با حضور محیط غیرخطی، می‌توان درهم تنیدگی را در سامانه تقویت نمود.

۲- برپایش فیزیکی سامانه:

آرایش فیزیکی سامانه مورد نظر شامل دو کاواک مشابه فابری-پرو به طول L به همراه آینه‌های متحرک در یکی از دو انتهای هریک از کاواک‌ها می‌باشد که توسط لیزرهای نور همدوس مشابه دمیده می‌شوند [۲، ۳]. درون هریک از کاواک‌ها، محیط غیرخطی OPA که توسط لیزرهای مشابه پمپ می‌شوند، قرار گرفته است (شکل ۱). در این پژوهش فرض شده است که کاواک‌ها تک مداند و این مدها از طریق فیبر نوری با یکدیگر جفت شده‌اند. لازمه درست بودن فرض کاواک تک مد این است که فرکانس نوسانات آینه، بسیار کوچکتر از فاصله جدایی بین مدهای اپتیکی درون کاواک باشد بطوریکه بتوان از پراکندگی مد اپتیکی به سایر مدها صرف نظر نمود [۴]

$$\omega_m \ll \Delta\omega_c = \frac{\pi c}{L} \quad (1)$$

در عبارت فوق، ω_m بسامد نوسانات مد مکانیکی و ω_c بسامد بازآوایی مد اپتیکی می‌باشد. در نتیجه می‌توان هامیلتونی سامانه کلی را در دستگاه مختصات چرخان وابسته به لیزر دمشی (ω_L) بدین صورت نوشت

معادلات خطی (۴) را می‌توان به فرم فشرده‌تر ماتریسی $u(t) = Au(t) + n(t)$ نوشت که در آن، $u(t)$ بردار عملگرهای سامانه، $n(t)$ بردار عملگرهای نوفه و ماتریس A به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$u(t)^T = (\delta\hat{q}_1, \delta\hat{p}_1, \delta\hat{q}_2, \delta\hat{p}_2, \delta\hat{X}_a, \delta\hat{Y}_a, \delta\hat{X}_b, \delta\hat{Y}_b)$$

$$n(t)^T = (0, \hat{\xi}_1, 0, \hat{\xi}_2, \sqrt{2\kappa_c} \hat{X}_a^{in}, \sqrt{2\kappa_c} \hat{Y}_a^{in}, \sqrt{2\kappa_c} \hat{X}_b^{in}, \sqrt{2\kappa_c} \hat{Y}_b^{in})$$

$$(7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_m & -\gamma_m & 0 & 0 & g_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_m & -\gamma_m & 0 & 0 & g_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_c + 2\chi \cos \theta & \Delta_a + 2\chi \sin \theta & 0 & \lambda \\ g_a & 0 & 0 & 0 & -\Delta_a + 2\chi \sin \theta & -(\kappa_c + 2\chi \cos \theta) & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\kappa_c + 2\chi \cos \theta & \Delta_b + 2\chi \sin \theta \\ 0 & 0 & g_b & 0 & -\lambda & 0 & -\Delta_b + 2\chi \sin \theta & -(\kappa_c + 2\chi \cos \theta) \end{pmatrix}$$

۲-۲- درهم‌تنیدگی در سامانه

چنانچه حالت اولیه سامانه گاوسی باشد، می‌توان ویژگی‌های کامل سامانه را در حالت پایا ($t \rightarrow \infty$)، با معرفی ماتریس هموردای V_{ij} بدست آورد [۶]

$$V_{ij} = \langle u_i(\infty)u_j(\infty) + u_j(\infty)u_i(\infty) \rangle / 2$$

(8)

که در رابطه فوق، $u(\infty)$ را باحل معادله ماتریسی مذکور می‌توان بدست آورد

$$u(t) = e^{At}u(0) + \int_0^t n(s)e^{A(s-t)}ds \quad (9)$$

برای پایدار بودن سامانه در حالت ایستا، همان‌طور که از رابطه (۹) نیز مشخص است، بایستی ویژه مقادیر ماتریس A همگی مقادیری منفی به خود بگیرند و یا به عبارتی در شرط پایداری روث-هورویتز صدق کنند [۷]. در نهایت، با استفاده از روابط (۸) و (۹) و در تقریب مارکوف می‌توان به معادله خطی زیر برای ماتریس هموردای سامانه دست یافت

$$AV + VA^T = -D$$

$$D = \text{diag}[0, \gamma_m(2\bar{n}_a + 1), 0, \gamma_m(2\bar{n}_b + 1), \kappa_c, \kappa_c, \kappa_c, \kappa_c] \quad (10)$$

که D در عبارت فوق نشان‌دهنده ماتریس قطری بردار عملگرهای نوفه در تقریب مارکوف و $\bar{n}_i = [e^{\hbar\omega_m/k_B T} - 1]^{-1}$ ($i = a, b$) متوسط فونون‌های گرمایی نوسانگر مکانیکی است. برای بررسی درهم‌تنیدگی

و ادنیدگی اولیه مدهای اپتیکی و $(\hat{b}_{in})\hat{a}_{in}$ نوفه‌ی خلأ الکترومغناطیس وارد بر کاواک اول (دوم) می‌باشد. برای بررسی درهم‌تنیدگی سامانه مذکور در حالت پایا، نیازمند به حل معادلات غیرخطی (۳) هستیم که کاری به مراتب دشوار است. اما در حالتی که میانگین دامنه‌های میدان لیزر فرودی بر کاواک‌ها در مقابل افت‌وخیزهای حول این مقدار میانگین قابل ملاحظه باشند ($|\alpha_s|, |b_s| \gg 1$)، با بازنویسی عملگرهای سامانه به فرم، $\hat{q} = q_s + \delta\hat{q}$ ، $\hat{p} = p_s + \delta\hat{p}$ و $\hat{a}(\hat{b}) = \alpha_s(b_s) + \delta\hat{a}(\delta\hat{b})$ می‌توان معادلات مذکور را به فرم خطی زیر تبدیل نمود [۳]

$$\delta\hat{q}_1 = \omega_m \delta\hat{p}_1, \quad \delta\hat{q}_2 = \omega_m \delta\hat{p}_2$$

$$\delta\hat{p}_1 = -\omega_m \delta\hat{q}_1 - \gamma_m \delta\hat{p}_1 + g_a \delta\hat{X}_a + \hat{\xi}_1(t)$$

$$\delta\hat{p}_2 = -\omega_m \delta\hat{q}_2 - \gamma_m \delta\hat{p}_2 + g_b \delta\hat{X}_b + \hat{\xi}_2(t)$$

$$\delta\hat{X}_a = (2\chi \cos \theta - \kappa_c) \delta\hat{X}_a + \lambda \delta\hat{Y}_b + (\Delta_a + 2\chi \sin \theta) \delta\hat{Y} + \sqrt{2\kappa_c} \hat{X}_a^{in}$$

$$\delta\hat{Y}_a = -(\kappa_c + 2\chi \cos \theta) \delta\hat{Y}_a + g_a \delta\hat{q}_1 - \lambda \delta\hat{X}_b + (2\chi \sin \theta - \Delta_a) \delta\hat{X}_a + \sqrt{2\kappa_c} \hat{Y}_a^{in}$$

$$\delta\hat{X}_b = (2\chi \cos \theta - \kappa_c) \delta\hat{X}_b + \lambda \delta\hat{Y}_a + (\Delta_b + 2\chi \sin \theta) \delta\hat{Y}_b + \sqrt{2\kappa_c} \hat{X}_b^{in}$$

$$\delta\hat{Y}_b = -(\kappa_c + 2\chi \cos \theta) \delta\hat{Y}_b + g_b \delta\hat{q}_2 - \lambda \delta\hat{X}_a + (2\chi \sin \theta - \Delta_b) \delta\hat{X}_b + \sqrt{2\kappa_c} \hat{Y}_b^{in}$$

در معادلات فوق، $\Delta_b = \Delta_0 - g_0 q_{2s}$ و $\Delta_a = \Delta_0 - g_0 q_{1s}$ ، به ترتیب وادنیدگی‌های مؤثر کاواک‌های اول و دوم و $g_a = g_0 \alpha_s \sqrt{2}$ و $g_b = g_0 b_s \sqrt{2}$ ، جفت‌شدگی‌های مؤثر اپتومکانیکی هستند که منجر به تولید درهم‌تنیدگی قابل ملاحظه‌ای در سامانه خواهند شد. عملگرهای مشاهده‌پذیر کوادراتوری و کمیت‌های عددی $b_s, \alpha_s, q_{1s(2s)}$ در معادلات فوق به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\delta\hat{X}_{a(b)} = \frac{\delta\hat{a}(\delta\hat{b}) + \delta\hat{a}^\dagger(\delta\hat{b}^\dagger)}{\sqrt{2}}$$

$$\delta\hat{Y}_{a(b)} = \frac{i(\delta\hat{a}^\dagger(\delta\hat{b}^\dagger) - \delta\hat{a}(\delta\hat{b}))}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_s = \frac{E - i\lambda b_s}{(\kappa_c + i\Delta_a) - 2\chi e^{i\theta}} \quad (5)$$

$$b_s = \frac{E - i\lambda \alpha_s}{(\kappa_c + i\Delta_b) - 2\chi e^{i\theta}}$$

$$q_{1s} = \frac{g_0 |\alpha_s|^2}{\omega_m}, \quad q_{2s} = \frac{g_0 |b_s|^2}{\omega_m}$$

تقریب مارکوف ($\bar{n}_i = \frac{k_B T}{\hbar \omega_m}$)، در حضور غیرخطیت OPA

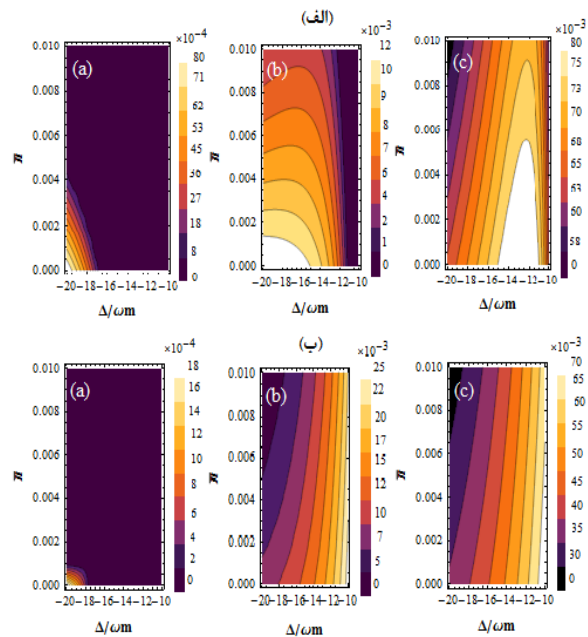
و نیز در حالتی که محیط غیرخطی ای در کاواکها وجود ندارد مشابه پارامترهای مراجع [۳، ۸] رسم شده است. همانطور که مشاهده می شود، حضور محیط غیرخطی، باعث جابه جایی نمودارهای درهم تنیدگی به سمت قدردمطلق وادیدگی های بزرگتر می شود، علاوه بر آن با قرار دادن محیط غیرخطی در کاواکها، توانستیم میزان انتقال درهم تنیدگی را به ویژه در قدردمطلق وادیدگی های بالا به میزان خوبی افزایش داده به گونه ای که نسبت به افزایش دما نیز از خود مقاومت بیشتری نشان می دهند.

۳- نتیجه گیری

همانطور که مشاهده کردیم، با اضافه نمودن محیط غیرخطی به سامانه های اپتومکانیکی جفت شده، توانستیم ثابت جفت شدگی و در نتیجه درهم تنیدگی را در سامانه و میان مدهای مختلف آن افزایش دهیم. علاوه بر این، با این عمل، توانستیم درهم تنیدگی های مقاومتری را نسبت به عامل اتلافی دما میان مدهای مختلف سامانه و در مقایسه با سامانه های اپتومکانیک برهنه ایجاد کنیم.

مراجع

- [1] Vitali D., Gigan S., Ferreira A., Bohm H., Tombesi P., Guerreiro A., et al, *Optomechanical entanglement between a movable mirror and a cavity field*, **Lasers and Electro-Optics and the International Quantum Electronics Conference CLEO-IQEC**, (2007).
- [2] Akram U., Munro W., Nemoto K., Milburn G. J., *Photon-phonon entanglement in coupled optomechanical arrays*, **Phys. Rev. A**, **86**, (2012) 042306.
- [3] Joshi C., Larson J., Jonson M., Andersson E., Öhberg P., *Entanglement of distant optomechanical systems*, **Phys. Rev. A**, **85**, (2012) 033805.
- [4] Kleckner D. P., *Micro-Optomechanical Systems for Quantum Optics*, University of California, 2010.
- [5] Gardiner C., Zoller P., *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*, Springer, 2004.
- [6] Adesso G., Illuminati F., *Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives*, **J. Phys. A**, **40**, (2007) 7821.
- [7] DeJesus E. X., Kaufman C., *Routh-Hurwitz criterion in the examination of eigenvalues of a system of nonlinear ordinary differential equations*, **Phys. Rev. A**, **35**, (1987) 5288.
- [8] Mi X., Bai J., Ke-hui S., *Robust entanglement between a movable mirror and a cavity field system with an optical parametric amplifier*, **Europhys. J. D**, **67**, (2013) 1-7.



شکل ۲: نمودار درهم تنیدگی میان مدهای مکانیکی (a)، مدهای اپتیکی- مکانیکی دو کاواک فاصله دار (b) و مدهای اپتیکی- مکانیکی تک کاواک (c) بر حسب وادیدگی نرمال و متوسط فوتون های گرمایی در حضور غیرخطیت OPA (الف) و بدون محیط غیرخطی (ب). پارامترهای مسئله بین صورت انتخاب شده اند: $\omega_m = 0.625$, $\omega_0 = 0.08\omega_m$, $\gamma_m = 0$, $\lambda = 5\omega_m$, $\theta = \pi/2$, $\chi = 0$ و برای (الف) و (ب) $g_a = g_b = 1.28\omega_m$ و $g_a = g_b = 0.64\omega_m$ است.

زیر سامانه های دوجزئی از سامانه اصلی، با حل عددی معادله (۱۰) و بدست آوردن ماتریس هموردای کلی سامانه، به اندازه گیری درهم تنیدگی از طریق سنجه لگاریتم نگاتیویته می پردازیم [۶]

$$E_N = \max[0, -\ln 2\nu_-] \quad (11)$$

که در آن $\nu_- = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Sigma - [\Sigma^2 - 4\text{Det}V]^{1/2}]^{1/2}$ کوچکترین ویژه مقدار هم تافته و Σ کمیت ناوردای تحت تبدیل هم تافته است که برحسب المان های ماتریس هموردای زیر سامانه های دوجزئی تعریف می شود

$$\Sigma = \text{Det}V_a + \text{Det}V_b - 2\text{Det}V_{corr} \quad (12)$$

$$V = \begin{pmatrix} V_a & V_{corr} \\ V_{corr} & V_b \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

در شکل (۲)، نمودار لگاریتم نگاتیویته برحسب وادیدگی مؤثر کاواکها و متوسط تعداد فوتون های گرمایی در