بیست و چهارمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و
دهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۱۰ الی ۱۲ بهمن ۹۶ - دانشگاه شهرکرد
24th Iranian Conference on Optics and Photonics (ICOP 2018) and
9th Iranian Conference on Photonics Engineering and Technology (ICPET 2018)
Jan 30 - Feb 1 , 2018 - Shahrekord University

کوانتش کانونیک میدان الکترومغناطیس در حضور یک تیغه نامتناهی ماده مغناطو-دی الکتریک دوناهمسانگرد جاذب قرار داده شده بین دو رسانای کامل نامتناهی تخت و موازی

علی شوقی ، مجید عموشاهی

دانشگاه اصفهان-گروه فیزیک

چکیده– با مدل سازی یک تیغه نامتناهی ماده مغناطو-دی الکتریک جاذب و دو ناهمسانگرد، قرار داده شده بین دو رسانای نامتناهی تخت و موازی ، یک کوانتش کانونیک از میدان الکترومغناطیس در حضور این تیغه بعمل می آید. قانون گوس و معادلات ماکسول به عنوان معادلات اولر-لاگرانژ استخراج می شوند. معادلات او لر-لاگرانژ نوسانگرهایی که تیغه مغناطو-دی الکتریک را مدل سازی می کنند معادلات ساختارمندی تیغه را بدست می دهند. تانسورهای نفوذ پذیری الکتریکی و مغناطیسی تیغه مغناطو-دی الکتریک بر حسب تانسورهای جفت کننده تیغه مغناطو-دی الکتریک و میدان الکترومغناطیس بدست می آیند. بسط متغیرهای دینامیکی میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطودی-الکتریک بر حسب ویژه مد های ناحیه بین دو رسانا ارائه می شود و عملگرهای نردبانی میدان الکترومغناطیس و نوسانگرهایی که ماده را مدل سازی می کنند معرفی می شودند.

کلید واژه ها – کوانتش کانونیک، تیغه مغناطو دی الکتریک دو ناهمسانگرد، معادلات ساختارمندی، تانسورهای نفوذ پذیری، تا نسورهای جفت کننده

Canonical quantization of electromagnetic field in the presence of a bi-anisotropic absorbing magneto-dielectric slab between two parallel perfectly conducting plates

Ali Shoghi , Majid Amooshahi

Department of Physics , University of Isfahan

Abstract- Modeling a bi-anisotropic absorbing magneto-dielectric slab by two continuum collections of the space-time dependent harmonic oscillators , a fully canonical quantization of electromagnetic field is achieved in the presence of such a magneto-dielectric slab inserted between two parallel perfectly conducting plates. The Gauss and Maxwell's laws are obtained as the classical Euler-Lagrange equations of the total system. Also the constitutive relations of the magneto-dielectric slab are obtained using the classical Euler-Lagrange equations of the harmonic oscillators modeling the magneto-dielectric slab. The electric and magnetic susceptibility tensors of the bi-anisotropic magneto-dielectric slab are expressed in terms of the coupling tensors that couple the electromagnetic field to the magneto-dielectric slab. The mode expansions of dynamical variables of the electromagnetic field and the magneto-dielectric slab are given and the ladder operators of the total system are introduced.

Keywords: Canonical quantization, Bi- anisotropic magneto-dielectric slab , Constitutive relations, Susceptibility tensors, Coupling tensors.

۱- مقدمه

در سال های اخیر یک روش کوانتش کاملا کانونیک از میدان الکترومغناطیس در حضور ماده مغناطو-دی الکتریک جاذب ارائه شده است [۳]، [۲]، [۱]. در این روش ماده را با دو مجموعه پیوستار و مستقل از نوسانگرهای هارمونیک سه بعدی مدل سازی می کنند. یکی از این مجموعه ها قطبش پذیری ماده و دیگری مغناطش پذیری ماده را توصیف می کند. معادلات ماکسول و معادلات ساختارمندی ماده به کمک معادلات اولر-لاگرانژ کل سیستم بدست می آید. تانسورهای نفوذ پذیری الکتریکی و مغناطیسی ماده بر حسب تانسورهای جفت کننده ماده و میدان الکترومغناطیس بدست می آیند. قطبش های الکتریکی و مغناطیسی نوفه بر حسب تانسورهای جفت کننده ماده و میدان الکترومغناطیس و نوسانگرهایی که ماده را مدل سازی می کنند در $t=0$ بدست می آیند.

۲- معادلات اویلر-لاگرانژ

لاگرانژی کل سیستم (میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطو-دی الکتریک جاذب دو ناهمسانگرد) به صورت زیر پیشنهاد می شود:

$$L(t)=\int_V d^3r[l_s+l_{em}+l_{\text{int}}]. \qquad (۱)$$

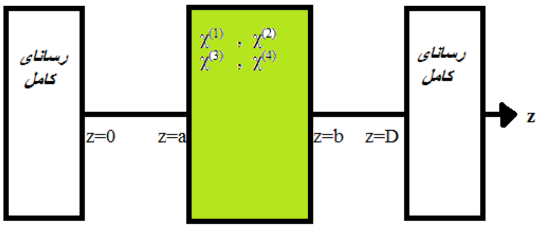
که در آن V حجم بین دو رسانای کامل تخت و موازی در شکل (۱) می باشد . $l_{\text{int}}, l_{em}, l_s$ به ترتیب چگالی های لاگرانژی ماده مغناطودی –الکتریک ، میدان الکترومغناطیس و برهمکنش بین آنها است و به صورت زیر هستند:

$$l_s=\int_0^{+\infty} d\omega\sum_{i=1}^{2}[\tfrac{1}{2}\dot{\vec X}_\omega^{(i)}(\vec r,t)\cdot\dot{\vec X}_\omega^{(i)}(\vec r,t) -\tfrac{1}{2}\omega^2\vec X_\omega^{(i)}(\vec r,t)\cdot\vec X_\omega^{(i)}(\vec r,t)]. \qquad (۲)$$

$$l_{em}=\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2-\frac{B^2}{2\mu_0}. \qquad (۳)$$

$$l_{\text{int}}=\int_0^{+\infty} d\omega\sum_{i=1}^{2}\sum_{m,n=1}^{3} f_i^{mn}(\omega,\vec r)E_m(\vec r,t)X_{\omega n}^{(i)}(\vec r,t) +\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{2}\sum_{m,n=1}^{3} g_i^{mn}(\omega,\vec r)B_m(\vec r,t)X_{\omega n}^{(i)}(\vec r,t). \qquad (۴)$$

که $\vec B=\vec\nabla\times\vec A$ و $\vec E=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}-\vec\nabla\varphi$ به ترتیب میدان های الکتریکی و مغناطیسی هستند که برحسب پتانسیل های اسکالر φ و برداری $\vec A$ نوشته می شوند. در چگالی لاگرانژی (۴) $i=1,2$ f_i, g_i تانسور های جفت کننده میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطو دی- الکتریک دوناهمسانگرد است.



شکل ۱: سیستم کل شامل میدان الکترومغناطیس و تیغه ی نامتناهی مغناطو –دی الکتریک دوناهمسانگرد جاذب بین دو صفحه رسانای کامل نامتناهی.

با استفاده از چگالی های لاگرانژی (۲)، (۳)و (۴) معادلات اویلر -لاگرانژ برای پتانسیل های اسکالر φ و برداری $\vec A$ به ترتیب به قانون گاوس و قانون ماکسول منجر می شوند.

$$\vec\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec E+\vec P)=0 \qquad (۵)$$

$$\vec\nabla\times(\frac{\vec B}{\mu_0}-\vec M)=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec E+\vec P) \qquad (۶)$$

که در آنها $\vec P$,$\vec M$ به ترتیب چگالی های قطبش الکتریکی و مغناطیسی ماده هستند و برحسب نوسانگرهایی که ماده مغناطودی –الکتریک را مدل سازی می کنند و تانسورهای جفت کننده میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطودی – الکتریک به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\vec P(r,t)=\int_0^{+\infty} d\omega\sum_{i=1}^{2} f_i(\omega,\vec r)\cdot\vec X_\omega^{(i)}(\vec r,t)$$
$$\vec M(r,t)=\int_0^{+\infty} d\omega\sum_{i=1}^{2} g_i(\omega,\vec r)\cdot\vec X_\omega^{(i)}(\vec r,t) \qquad (۷)$$

همچنین معادلات اویلر- لاگرانژ برای نوسانگرهایی که ماده را مدل سازی می کنند به صورت زیر بدست می آیند:

$$\ddot{\vec X}_\omega^{(i)}(\vec r,t)+\omega^2\vec X_\omega^{(i)}(\vec r,t) = f_i^t(\omega,\vec r)\cdot E(\vec r,t)+g_i^t(\omega,\vec r)\cdot B(\vec r,t) \qquad (۸)$$

که در این رابطه بالا نویس t نشانگر ترانهاده است. پاسخ معادله (۸) به شکل زیر است:

$$\vec{X}_{\omega}^{(i)}(\vec{r},t) = \vec{X}_{\omega}^{(i)}(\vec{r},0)\cos\omega t + \frac{\sin\omega t}{\omega}\dot{\vec{X}}_{\omega}^{(i)}(\vec{r},0)$$
$$+\int_0^t dt' \frac{\sin\omega(t-t')}{\omega}[f_i^t(\omega,\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r},t') + g_i^t(\omega,\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r},t'). \quad (۹)$$

با جایگذاری (۹) در (۷) روابط ساختارمندی به شکل زیر می شوند:

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{P}_N(\vec{r},t) + \int_0^{|t|} dt'[\chi^{(1)}(\vec{r},|t|-t')\cdot\vec{E}(\vec{r},\pm t')$$
$$+\chi^{(2)}(\vec{r},|t|-t')\cdot\vec{B}(\vec{r},\pm t')],$$
$$\vec{M}(\vec{r},t) = \vec{M}_N(\vec{r},t) + \int_0^{|t|} dt'[\chi^{(3)}(\vec{r},|t|-t')\cdot\vec{E}(\vec{r},\pm t')$$
$$+\chi^{(4)}(\vec{r},|t|-t')\cdot\vec{B}(\vec{r},\pm t')]. \quad (۱۰)$$

علامت های مثبت (منفی) به ترتیب برای $t>0$ $(t<0)$ هستند و تانسور های $\chi^{(i)}, i=1,2,3,4$ تانسورهای پذیرفتاری ماده هستند. ودر مرجع [۲]بر حسب تانسورهای جفت کننده $f_i\,, g_i \quad i=1,2$ معرفی شده اند. در معادله (۱۰) $\vec{M}_N, \vec{P}_N$ میدان های قطبش الکتریکی و مغناطیسی نوفه هستند که برحسب تانسورهای جفت کننده $f_i\,, g_i \quad i=1,2$ و نوسانگرهایی که ماده را مدل سازی می کنند بدست می آیند [۲].

۳- کوانتش کانونیک

در این بخش یک کوانتش کانونیک برای میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطودی- الکتریک بعمل می آید برای این منظور از پیمانه کولمب ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$) استفاده می کنیم و درجه آزادی اضافی پتانسیل اسکالر φ را به کمک قانون گوس (۵) از لاگرانژی سیستم حذف می کنیم . با استفاده از قانون گوس (۵) می توان پتانسیل اسکالر φرا به صورت زیر بر حسب چگالی بارهای الکتریکی قطبشی القا شده در ماده مغناطودی -الکتریک نوشت:

$$\varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r' G(\vec{r},\vec{r}')\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}',t) \quad (۱۱)$$

که $G(\vec{r},\vec{r}')$ تابع گرین برای ناحیه بین دوصفحه رسانا در شکل (۱) است و در شرایط مرزی دیریخله روی سطوح $z=0,D$ و معادله $\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ صدق می کند . تابع گرین $G(\vec{r},\vec{r}')$به صورت زیر است:

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{2\pi^2 D}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d^2k\,[\frac{\exp(i\vec{k}^{\parallel}.(\vec{r}^{\parallel}-\vec{r}'^{\parallel}))}{k_x^2+k_y^2+(\frac{n\pi}{D})^2}$$
$$\times\sin(\frac{n\pi z}{D})\sin(\frac{n\pi z'}{D})].$$

در این رابطه $d^2k = dk_x dk_y$ و $\vec{k}^{\parallel} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j}$ و $\vec{r}^{\parallel} = x\hat{i} + y\hat{j}$ است. با جایگزاری φ از معادله (۱۱) در لاگرانژی (۴) _ (۱) و استفاده از پیمانه کولمب $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ و انتگرال گیری جز به جز به عبارت زیر برای لاگرانژی کل سیستم می رسیم:

$$L(t) = \int_V d^3r[\tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})^2 - \frac{(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2}{2\mu_0} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot\vec{P}^T + (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{M}]$$
$$+\int_V d^3r\int_0^{+\infty} d\omega\sum_{i=1}^{2}[\tfrac{1}{2}(\dot{\vec{X}}_{\omega}^{(i)})^2 - \tfrac{1}{2}\omega^2(\vec{X}_{\omega}^{(i)})^2]$$
$$-\frac{1}{2\varepsilon_0}\int_V d^3r\int_V d^3r' G(\vec{r},\vec{r}')\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r},t)\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}',t) \quad (۱۲)$$

که میدان های قطبش و مغناطش با معادلات (۷) داده شده اند و عبارت $\vec{P}^T$ مولفه عرضی بردار قطبش می باشد و بصورت زیر تعریف می شود:

$$P_i^T(\vec{r},t) = \sum_{j=1}^{3}\int_V d^3r'\delta_{ij}^T(\vec{r},\vec{r}')P_j(\vec{r}',t),$$
$$\delta_{ij}^T(\vec{r},\vec{r}') = \delta_{ij}\delta(\vec{r}-\vec{r}') - \frac{\partial}{\partial x_i}G(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial}{\partial x'_j} \quad (۱۳)$$

اکنون تنها متغییر دینامیکی میدان الکترومغناطیس پتانسیل برداری $\vec{A}$ است. با استفاده از چگالی لاگرانژی (۱۲) متغییر های همیوغ میدان های $\vec{X}_{\omega}^{(1)}(r,t)$ و $\vec{X}_{\omega}^{(2)}(r,t)$ و $\vec{A}$ به ترتیب به شکل زیر داده می شوند:

$$-\vec{D} = \varepsilon_0\dot{\vec{A}} - \vec{P}^T \quad (۱۴)$$

$$\vec{Q}_{\omega}^{(i)} = \dot{\vec{X}}_{\omega}^{(i)} \qquad i = 1\text{و}2 \quad (۱۵)$$

اکنون با داشتن متغییر های همیوغ کل سیستم در معادلات (۱۴) و (۱۵) روابط جابجایی زیر روی آنها اعمال می شود:

$$[\vec{X}_{\omega}^{(i)}(\vec{r},t),\vec{Q}_{\omega'}^{(j)}(\vec{r}',t)]=i\hbar I\delta_{ij}\delta(\omega-\omega')\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$
$$[A_i(\vec{r},t),-D_j(\vec{r}',t)]=i\hbar\delta_{ij}^{T}(\vec{r},\vec{r}') \quad (۱۶)$$

اکنون به کمک هامیلتونی کل سیستم:

$$H(t)=\int_V d^3r[\int_0^{+\infty}d\omega\sum_{i=1}^{2}\vec{Q}_{\omega}^{(i)}\cdot\dot{\vec{X}}_{\omega}^{(i)}-\vec{D}\cdot\dot{\vec{A}}]-L(t)$$

و روابط جابجایی (۱۶) می توان نشان داد معادله ماکسول (۶) و معادلات ساختارمندی (۱۰) در تصویر هایزنبرگ معتبر باقی می مانند. بسط متغیرهای دینامیکی همیوغ میدان الکترومغناطیس وماده مغناطودی-الکتریک بر حسب مدهای ناحیه بین دو رسانا درشکل (۱) به شکل زیر است:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int d^2k\sqrt{\frac{\hbar}{(2\pi)^2D\omega_n(\vec{k}^{\parallel})\varepsilon_0}}\times$$
$$[a_{n\lambda}(\vec{k}^{\parallel},t)\vec{V}_{n\lambda}(\vec{k}^{\parallel},\vec{r})$$
$$+a_{n\lambda}^{*}(\vec{k}^{\parallel},t)\vec{V}_{n\lambda}^{*}(\vec{k}^{\parallel},\vec{r})]$$
$$\vec{D}(\vec{r},t)=-i\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int d^2k\sqrt{\frac{\hbar\omega_n(\vec{k}^{\parallel})\varepsilon_0}{(2\pi)^2D}}$$
$$\times[a_{n\lambda}^{*}(\vec{k}^{\parallel},t)\vec{V}_{n\lambda}^{*}(\vec{k}^{\parallel},\vec{r})$$
$$-a_{n\lambda}(\vec{k}^{\parallel},t)\vec{V}_{n\lambda}(\vec{k}^{\parallel},\vec{r})] \quad (۱۷)$$

$$\vec{X}_{\omega}^{(i)}(\vec{r},t)=\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int d^2k\sqrt{\frac{\hbar}{(2\pi)^2D\omega}}\times$$
$$[b_{n\lambda}^{(i)}(\vec{k}^{\parallel},t)\vec{V}_{n\lambda}(\vec{k}^{\parallel},\vec{r})$$
$$+(b_{n\lambda}^{(i)})^{*}(\vec{k}^{\parallel},t)V_{n\lambda}^{*}(\vec{k}^{\parallel},\vec{r})]$$
$$\vec{Q}_{\omega}^{(i)}(\vec{r},t)=-i\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int d^2k\sqrt{\frac{\hbar\omega}{(2\pi)^2D}}\times$$
$$[b_{n\lambda}^{(i)}(\vec{k}^{\parallel},t)\vec{V}_{n\lambda}(\vec{k}^{\parallel},\vec{r})$$
$$-(b_{n\lambda}^{(i)})^{\tau}(\vec{k}^{\parallel},t)\vec{V}_{n\lambda}^{*}(\vec{k}^{\parallel},\vec{r})]$$
(۱۸)

که در آن $\omega_n(\vec{k}^{\parallel})=C\sqrt{k_x^2+k_y^2+(\frac{n\pi}{D})^2}$ است و مو لفه های دکارتی ویژه بردارهای $\vec{V}_{n\lambda}(k^{\parallel},r)$ به صورت زیر داده می شوند:

$$[V_{n,\lambda}(\vec{k}^{\parallel},\vec{r})]_j=e_j(\lambda,n,\vec{k}^{\parallel})f_j(n,\vec{r}) \quad j,\lambda=1,2,3$$
$$f_1(n,\vec{r})=f_2(n,\vec{r})=-i\exp(i\vec{k}^{\parallel}.\vec{r}^{\parallel})\sin(\frac{n\pi z}{D})$$
$$f_3(n,\vec{r})=\exp(i\vec{k}^{\parallel}.\vec{r}^{\parallel})\cos(\frac{n\pi z}{D})$$

که در آن $\lambda=1,2$ $\vec{e}(\lambda,n,\vec{k}^{\parallel})$ برای هر $n,\vec{k}^{\parallel}$ دو بردار واحد متعامد هستند و هر دو بر بردار واحد $\vec{e}(3,n,\vec{k}^{\parallel})=\dfrac{\vec{k}^{\parallel}-\frac{n\pi}{D}\hat{z}}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+\frac{n^2\pi^2}{D^2}}}$ عمود هستند.

در بسط های (۱۷)و(۱۸)عملگرهای نردبانی متغیرهای دینامیکی میدان الکترومغناطیس و ماده در روابط جابجایی زیر صدق می کنند:

$$[a_{n\lambda}(\vec{k}^{\parallel},t),a_{n'\lambda'}^{*}(\vec{k}'^{\parallel},t)]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{nn'}\delta(\vec{k}^{\parallel}-\vec{k}'^{\parallel})$$
$$[b_{n\lambda}^{(i)}(\omega,\vec{k}^{\parallel},t),(b_{n'\lambda'}^{(j)})^{*}(\omega',\vec{k}'^{\parallel},t)]=\delta_{ij}$$
$$\times\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{nn'}\delta(\omega-\omega')\delta(\vec{k}^{\parallel}-\vec{k}'^{\parallel})$$

۴- نتیجه گیری

در این مقاله با تعمیم روش ارائه شده در مراجع یک کوانتش کاملا کانونیک از میدان الکترومغناطیس در حضور یک تیغه نامتناهی ماده مغناطو-دی الکتریک جاذب دو ناهمسانگرد قرار داده شده بین دو رسانای کامل تخت و موازی ارائه شده است.

مراجع

[1] M. Amooshahi, J. Math. Phys. 50, 062301 (2009).
[2] M. Amooshahi, Eur. Phys. J. D, 69:66 (2015).
[3] M. Amooshahi, Int.J. Theor. Phys 55 ,3761-3776(2016).