

## شبیه‌سازی ورتكس نوری غیرکانونیک با استفاده از روش درون‌یابی هادگین

<sup>۱</sup>فروزان حبیبی، <sup>۲</sup>محمد مرادی

<sup>۲</sup>گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد

چکیده - جبهه موج هنگام عبور از آشفتگی‌های جوی انحراف پیدا می‌کند و باعث کاهش عملکرد سیستم اپتیکی می‌شود. در یک ورتكس فاز با مقدار  $2\pi m$  اطراف هسته افزایش می‌یابد که  $m$  اشاره دارد به بار توپولوژی که می‌تواند مثبت یا منفی باشد و معرف ورتكس است. یافتن موقعیت ورتكس از طریق شبیه‌سازی آن روشی برای بهبود عملکرد سیستم‌های اپتیکی است. در این مقاله با استفاده از روش درون‌یابی هادگین در زبان برنامه نویسی Labview به شبیه‌سازی و توصیف ورتكس غیرکانونیک می‌پردازیم. با رسی نمودار  $D$  بر حسب  $\mu$  و  $\nu$  و  $\alpha$  و  $\beta$  موقعیت ورتكس‌ها به دست می‌آید. از نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود در  $(\mu, \nu) = (0, 0)$  یک پرش در زاویه  $\alpha = \pi/2$  دیده می‌شود، که بار توپولوژی تغییر علامت می‌دهد. این موقعیت، ورتكس غیرکانونیک است.

کلید واژه- آشفتگی جو، بار توپولوژی، روش درون‌یابی هادگین، ورتكس اپتیکی.

## Simulation of the noncanonical optical vortex by use of Hudgin interpolation method

Foruzan Habibi <sup>1</sup>, Mohammad Moradi <sup>2</sup>

Department of Physic, Faculty of Sciences, University of Shahrekord <sup>1,2</sup>

**Abstract-** After propagating through the turbulent atmosphere the wave front distorted, which causes the degradation of performance in an optical system. Around the vortex core, the phase increase by a  $2m\pi$  with the integer being referred to as the topological charge of the vortex. Therefore, a vortex can be positive or negative. One way to improve the performance of optical system is detection and simulation of optical vortex. At the article we have simulated a noncanonical vortex by use of Hudgin method at Labview software. The vector field  $G$  according to the circulation  $D$  that is proved by Hudgin interpolation method. The result of this computation  $D$  is a distribution of the topological charges of the optical vortex. With the plots of circulation  $D$  for a noncanonical vortex, it can show the peak value at  $(\mu, \nu) = (0, 0)$  for  $D$  as a function of  $\alpha$ ,  $\beta$ . The peak is positive or negative. The jump at  $\alpha = \pi/2$  is due to the change in the topological charge of the vortex that is location of noncanonical vortex.

**Keywords:** Turbulent atmosphere, Topological charge, Hudgin interpolation method, Optical vortex.

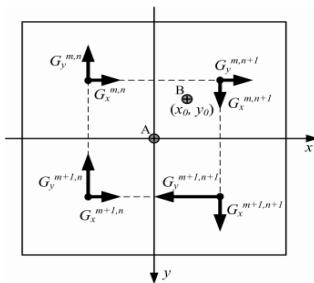
این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت [www.opsi.ir](http://www.opsi.ir) قابل دسترسی باشد.

سازی ورتكس با خروجی حسگر صورت می‌گیرد. خروجی حسگری جبهه‌موج با یک میدان برداری به صورت  $G = G_x(x, y)i + G_y(x, y)j$  بیان می‌شود. اگر این میدان برداری نشان‌دهنده گرادیان یک تابع فاز پیوسته باشد رابطه زیر برقرار است [۱۰].

$$\frac{\partial G_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial G_y(x, y)}{\partial x} \quad (4)$$

نقاطی که در این رابطه صدق کنند، معرف ورتكس‌های اپتیکی هستند که از چرخش  $G$ ، میدان برداری  $D$  به وجود می‌آید و به صورت حلقه‌ای است که در راستای  $z$  است.

شکل ۱ تحلیل فیزیکی این جریان را به روش درونیابی هادگین نشان می‌دهد.



شکل ۱: تحلیل فیزیکی جریان به روش میان‌یابی هادگین.

ورتكس غیرکانونیک سوسوزن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla\varphi(x, y) = \frac{(x\hat{y} - y\hat{x})c}{x^2(1+A) - 2xyB + y^2(1-A)} \quad (5)$$

این ورتكس  $D^{mn}$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} D^{mn} &= \frac{\mu_p(A_m - B)}{2A_m} \arctan\left(\frac{\mu_p B - v_m A_m}{\mu_p C}\right) \\ &- \frac{\mu_p(A_m + B)}{2A_m} \arctan\left(\frac{\mu_p B - v_p A_m}{\mu_p C}\right) + \\ &\frac{\mu_m(A_m + B)}{2A_m} \arctan\left(\frac{\mu_m B - v_m A_m}{\mu_m C}\right) - \\ &\frac{\mu_m(A_m - B)}{2A_m} \arctan\left(\frac{\mu_m B - v_p A_m}{\mu_m C}\right) + \\ &\frac{v_p(A_p - B)}{2A_p} \arctan\left(\frac{v_p B - \mu_m A_p}{v_p C}\right) - \end{aligned}$$

## ۱- مقدمه

ورتكس‌های اپتیکی [۱] پدیده‌های فراگیر و یک ویژگی طبیعی پرتوهای نوری هستند که با عبور جبهه‌موج نوری از جو آشفته به وجود می‌آید [۲,۳]. برای یک ورتكس نوری فاز میدان موجی تعریف نشده [۱۱] و دامنه صفر است. با درنظرگرفتن یک پرتو با میدان موج مختلط تکفam ( $u(r, \theta)$ ) که در راستای  $z$  انتشار می‌یابد و با فرض اینکه یک ورتكس عرضی در مرکز میدا ( $r = 0$ ) دارد، می‌توان آن را به صورت  $u(r, \theta, z) = Ae^{im\theta} e^{i\varphi_m}$  نمایش داد. در اینجا  $(r, \theta, z)$  مختصات استوانه‌ای هستند و محور تقارن در  $z$  راستای است.  $m$  یک عدد صحیح است که بار توبولوژی را نشان می‌دهد،  $\varphi_m$  فاز است و میدان پیچشی به صورت  $e^{i(wt - kz)}$  تعریف می‌شود که  $\kappa = 2\pi/\lambda$  عدد موج و  $\lambda$  طول موج است. سطوح هم‌فاز  $m + kz + \varphi_m = cte$  میدان الکتریکی انتشار یافته به صورت  $(r = 0)$  است. فاز در همه جا به جز در مرکز تکینگی  $(r = 0)$  پیوسته است.  $A(r)$  یک دامنه حقیقی است و در نقاطی که  $A(r) = 0$  است، فاز مقداری نامشخص دارد [۷]. ورتكس بر دو نوع است، کانونیک و غیر کانونیک. ورتكسی که در آن افزایش فاز به صورت خطی و دارای زاویه سمتی با محورش است، کانونیک نامیده می‌شود، که این ورتكس متقارن است [۱۲]. در این ورتكس تابع دامنه، مختلط و در مختصات دکارتی به صورت  $v_c(x, y) = x \pm iy$  نوشته می‌شود. دسته دیگر، ورتكس‌های غیرکانونیک هستند که در ورتكس‌های با بار مخالف شکل می‌گیرند و نامتقارن هستند. تابع دامنه، مختلط برای یک ورتكس غیرکانونیک  $v(x, y)$  به صورت ترکیب خطی دو ورتكس کانونیک است [۸].

$$v(x, y) = 1/\sqrt{2}(\xi(x+iy)\zeta(x-iy)) \quad (1)$$

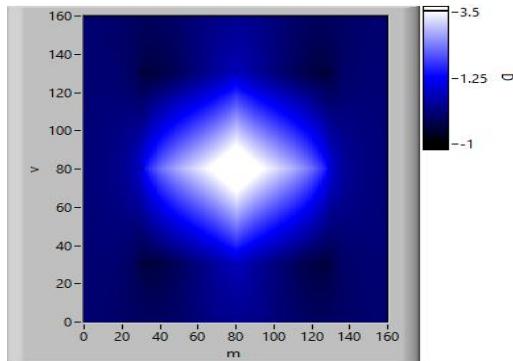
$$\xi = \cos(\alpha/2)e^{i\beta/2} \quad (2)$$

$$\zeta = \sin(\alpha/2)e^{-i\beta/2} \quad (3)$$

شرط وجود ورتكس اپتیکی انتگرال مسیر  $\nabla\varphi \cdot dl$  است. در این انتگرال  $m \equiv 1/(2\pi) \oint \nabla\varphi \cdot dl$  گرادیان فاز و  $dl$  یک عنصر بسیار کوچک از بردار مسیر است.  $m$  عددی صحیح و بار توبولوژی است. با یک حسگر جبهه‌موج می‌توان ورتكس اپتیکی را با این انتگرال مسیر روی تمام زیردهانه‌ها حسگری کرد که روند آشکار-

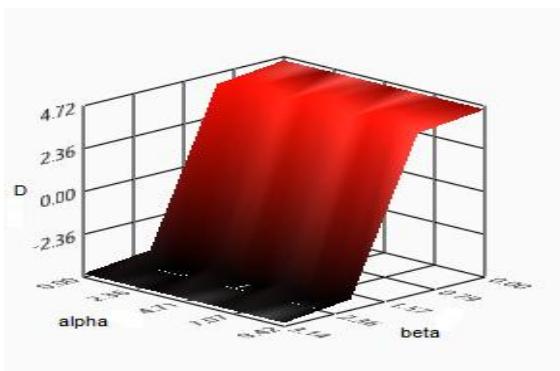
## ۲- نتایج

نمودار  $D$  را از طریق معادله (۶) و به کمک زبان برنامه نویسی Labview و به ازای  $-8 \leq \mu \leq 8$  و  $-8 \leq \nu \leq 8$  - شبیه سازی و رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم  $\alpha = \pi/4$  و  $\beta = \pi$  است.



شکل ۲: نمودار  $\nu$  بر حسب  $\mu$  که شدت نشان دهنده  $D$  است.

شکل ۳ نیز که با برنامه نویسی Labview رسم شده نشان می‌دهد که اکسترم  $D$  در  $(\mu, \nu) = (0, 0)$  است که به ازای  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  این اکسترم مثبت است و به ازای  $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$  این مقدار منفی است و همچنین در  $\alpha = \pi/2$  یک پرس مشاهده می‌شود که بیانگر تغییر بار توپولوژی است.



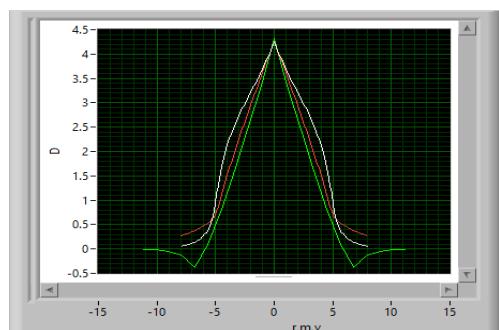
شکل ۳: نمودار سه بعدی ورتكس غیرکانونیک

اگر نمودارهای  $D$  بر حسب  $r, \mu, \nu$  برای ورتكس غیرکانونیک مربوط به شکل ۲ را رسم کنیم، به ترتیب برای  $\nu = 0$  خط  $\mu$  و برای  $\mu = 0$  خط  $\nu$  و برای  $\nu^2 + r^2 = \mu^2$  نظر گرفته می‌شود. این نتایج در شکل ۴ نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\nu_p(A_p + B)}{2A_p} \arctan \left( \frac{\nu_p B - \mu_p A_p}{\nu_p C} \right) + \\
 & \frac{\nu_m(A_p + B)}{2A_p} \arctan \left( \frac{\nu_m B - \mu_m A_p}{\nu_m C} \right) - \\
 & \frac{\nu_m(A_p - B)}{2A_p} \arctan \left( \frac{\nu_m B - \mu_p A_p}{\nu_m C} \right) - \\
 & \frac{\mu_p B}{A_m} \arctan \left( \frac{\nu A_m - \mu_p B}{\mu_p C} \right) + \frac{\mu_m B}{A_m} \times \\
 & \arctan \left( \frac{\nu A_m - \mu_m B}{\mu_m C} \right) - \frac{\nu_p B}{A_p} \arctan \left( \frac{\mu A_p - \nu_p B}{\nu_p C} \right) \\
 & + \frac{\nu_m B}{A_p} \arctan \left( \frac{\mu A_p - \nu_m B}{\nu_m C} \right) + \mu \arctan \frac{\mu B - \nu_p A_m}{\mu C} \\
 & - \mu \arctan \frac{\mu B - \nu_m A_m}{\mu C} + \nu \arctan \frac{\nu B - \mu_p A_p}{\nu C} - \nu \times \\
 & \arctan \frac{\nu B - \mu_m A_p}{\nu C} + \frac{\nu_p C}{4A_p} \times \\
 & \ln \frac{(2\mu_p \nu_p B - \mu_p^2 A_p - \nu_p^2 A_m)}{(2\mu \nu_p - \mu^2 A_p - \nu_p^2 A_m)^2} \times \\
 & (2\mu_m \nu_p B - \mu_m^2 A_p - \nu_p^2 A_m) - \frac{\nu_m C}{4A_p} \times \\
 & \ln \frac{(2\mu_m \nu_m B - \mu_m^2 A_p - \nu_m^2 A_m)}{(2\mu \nu_m - \mu^2 A_p - \nu_m^2 A_m)^2} \times \\
 & (2\mu_p \nu_m B - \mu_p^2 A_p - \nu_m^2 A_m) + \\
 & \frac{\mu_p C}{4A_m} \ln \frac{(2\mu_p \nu_m B - \mu_p^2 A_p - \nu_m^2 A_m)}{(2\mu_p \nu B - \mu_p^2 A_p - \nu^2 A_m)^2} \times \\
 & (2\mu_p \nu_p B - \mu_p^2 A_p - \nu_p^2 A_m) \\
 & - \frac{\mu_m C}{4A_m} \ln \frac{(2\mu_m \nu_p B - \mu_m^2 A_p - \nu_p^2 A_m)}{(2\mu_m \nu B - \mu_m^2 A_p - \nu^2 A_m)^2} \times \\
 & (2\mu_m \nu_m B - \mu_m^2 A_p - \nu_m^2 A_m)
 \end{aligned} \tag{6}$$

در این رابطه جملات مختصات نرمال به صورت  $-8 \leq \nu \leq 8$  و  $-8 \leq \mu \leq 8$  و  $\nu = y_0/w$  و  $\mu = x_0/w$  است، مقدار این بازه با تغییر اندازه زیردهانه  $w$  تغییر می‌کند. پارامترها به صورت  $A = \sin \alpha \cos \beta$  و  $B = \sin \alpha \sin \beta$  تعریف می‌شوند. برای هر نقطه یک  $\alpha$  و  $\beta$  مشخص داریم. که  $\mu_m = \mu - 1$  و  $\mu_p = \mu + 1$  و  $A_m = 1 - A$  و  $A_p = 1 + A$  و  $\nu_m = \nu - 1$  و  $\nu_p = \nu + 1$  است.

- [7] F.S.Roux, *Fluid dynamical enstrophy and the number of optical vortices in a paraxial beam*, Opt. Commun, Vol. 242, pp.45-55, July 2006.
- [8] F.S.Roux, *Coupling of noncanonical Optical vortex*, J.Opt. Soc. Am. B, Vol.21, No.3, pp.664-670, Mar. 2004.
- [9] D. L. Fried, *Branch point problem in adaptive optics*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol.15, no.10,pp.2759-2768.Oct 1998..
- [10] M. Chen, *Optical vortex detection and strongly scintillated beam correction using vortex dipole annihilation*, pp.28-38, University Pretoria, Apr.2008.
- [11] F.S.Roux. *Vortex trajectories in an astigmatic and elliptical Gaussian beam*, physics,University of Pretoria, Feb 2006.
- [12] G.Molina, *Propagation and control of noncanonical optical vortices* optics Letters.,Macquarie University.Mar 2001.



شکل ۴: نمودار مقایسه ای  $D$  بر حسب  $r, \mu, v$  برای یک ورتسک غیرکانونیک است، در این نمودار منحنی سفید  $v$  بر حسب  $D$  و منحنی قرمز،  $D$  بر حسب  $\mu$  و منحنی سبز،  $D$  بر حسب  $r$  است.

### ۳- جمع بندی

شکل ۲ نشان می‌دهد که شدت نمودار در مرکز بیشینه است که هسته ورتسک نامیده می‌شود و در این نقطه فاز به صورت تکین بوده و متقارن است و شباهت بسیاری با حالت کانونیک دارد زیرا ورتسک کانونیک متقارن و ورتسک غیرکانونیک نامتقارن است. این مقدار بیشینه برای هر سه منحنی که در شکل ۴ نشان داده شده، یکسان است. در شکل ۳ به ازای زوایای خاص  $\alpha$  و  $\beta$  پرشی در منحنی مشاهده می‌شود که به دلیل تغییر بار توپولوژی است. این موضوع باعث به وجود آمدن ورتسک غیرکانونیک می‌شود.

### مراجع

- [1] M. Chen and F. S. Roux, *Accelerating the annihilation of an optical vortex dipole in a Gaussian beam*, J. Opt. Soc . Am . A. 25, 1279-1286.(2008)
- [2] P. Coullet, L. Gi, and F. Rocca, *Optical vortices*, Vol. 73, no. 5, pp.403-408, Nov.1989.
- [3] K. Staliunas, M. Vasnetsov, *Optical Vortices*, Vol.228 in Horizons in World Physics, New York. Nova Science Publishers, 1999.
- [4] M. Vasnetsov, K.Staliunas, *Optical vortices*, Horizons in World Physics,228, Nova Science, New York, 1999
- [5] M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, *Singular optics*. Wof E.Progress in Optics, V. XLII. Amsterdam: Elsevier, 219-276, 2001.
- [6] A. Bekshaev, M. Sokin, and M. Vasnetsov, *Paraxial light beams with angular momentum*, M. Schulz.Progress in Optics Research, Nova Science Publishers, 1-75, 2008.