اثر محیط غیرخطی کِر در تبادل درهم‌تنیدگی بین دو اتم دوترازی

مهناز قاسمی[(۱)]؛ علیرضا نورمندی‌پور[(۱)] ؛ محمدکاظم توسلی[(۱),(۲)]
[(۱)] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
[(۲)] آزمایشگاه پردازش اطلاعات کوانتومی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده – در این مقاله تبادل درهم‌تنیدگی بین دو اتم در دو کاواک مجزا که در هر کدام اتم مورد نظر با یک میدان الکترومغناطیسی در حضور محیط غیرخطی کِر برهم‌کنش می‌کند را بررسی می‌کنیم. به منظور انتقال درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها، یک اندازه‌گیری حالت بِل روی میدان‌های خروجی از کاواک‌ها اعمال می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهند که تحت شرایط خاص، حداکثر مقدار درهم‌تنیدگی بین دو اتم می‌تواند به‌وجود آید. میزان درهم‌تنیدگی به‌وجود آمده با تغییر حالت اولیه سامانه، پارامتر نامیزانی و هم‌چنین محیط کِر قابل تنظیم است.
کلید واژه- تبادل درهم‌تنیدگی ،مدل جینز کامینگز، محیط کِر.

The Effect of Nonlinear Kerr Medium on the Entanglement Swapping Between Two Two-Level Atoms

M. Ghasemi [(1)] ; A. Nourmandipour [(1)]; M. K. Tavassoly [(1),(2)]

[(1)] Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd
[(2)] The Laboratory of Quantum Information Processing, Yazd University, Yazd

Abstract- In this paper, we investigate the entanglement swapping between two two-level atoms inside two separate cavities in which each atom interacts with an electromagnetic field in the presence of a nonlinear Kerr medium. In order to transfer the entanglement between the two atoms (entanglement swapping), we perform a Bell-state measurement on the field modes leaving the cavities. The results show that under certain conditions, the maximum value of entanglement can be achieved. It is established that the degree of entanglement is tunable by changing the initial state of the system, the off-resonance parameter and also the Kerr medium, appropriately.
Keywords: Entanglement Swapping, Jaynes-Cummings Model, Kerr Medium.

۱- مقدمه

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت **www.opsi.ir** قابل دسترسی باشد.

است که دارای هیچ مشابه کلاسیکی نیست [۱]. اساسی‌ترین و در عین حال ساده‌ترین روش‌های تولید حالت‌های درهم‌تنیده مبتنی بر بهره‌گیری از فرآیند برهم‌کنش اتم-میدان در داخل یک کاواک است [۲]. یکی از رایج‌ترین مدل‌های توصیف‌کننده برهم‌کنش اتم دوترازی و میدان در یک کاواک، به مدل جینز-کامینگز معروف است [۳]. با تعمیم این مدل می‌توان برهم‌کنش را در حضور محیط کِر، اثر استارک و هم‌چنین لحاظ‌کردن جفت‌شدگی وابسته به شدت بررسی نمود. مطالعات زیادی در مورد ویژگی‌های درهم‌تنیدگی برای یک میدان کوانتیده با یک اتم دوترازی در مدل جینز-کامینگز و تعمیم‌های مختلف آن شده است [۴]. از طرفی یکی از روش‌های درهم‌تنیده کردن سامانه‌های کوانتومی که هیچگاه با هم برهم‌کنش نداشته‌اند استفاده از مفهومی به نام "تبادل درهم- [illegible] که هر [illegible] میدان تک‌مد در حضور محیط کِر است را در نظر می‌گیریم. به منظور درهم‌تنیده کردن دو اتم، از رهیافت تبادل درهم‌تنیدگی استفاده می‌کنیم. بدین صورت که روی مدهای میدان خروجی از کاواک‌ها، اندازه‌گیری حالت بِل را انجام می‌دهیم. در نهایت، ضمن بررسی اثر کِر، اثر پارامتر نامیزانی و هم‌چنین تغییر حالت اولیه یکی از زیرسامانه‌ها را بر میزان درهم‌تنیدگی بین دو اتم بررسی می‌کنیم.

۲- مدل و روابط پایه

سامانه مورد نظر، شامل دو زیرسامانه مستقل اتم-میدان $(AF)_1$ و $(AF)_2$ در حضور محیط کِر که توسط مدل جینز-کامینگز توصیف می‌شوند، است. هامیتونی هر زیرسامانه را می-

توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{H}_{(AF)_i} = \frac{\omega_i}{2}\hat{\sigma}_i^z + \Omega_i(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2}) + g_i(\hat{a}_i\hat{\sigma}_i^+ + \hat{a}_i^\dagger\hat{\sigma}_i^-) + \chi_i \hat{a}_i^{\dagger 2}\hat{a}_i^{\,2}, \quad (۱)$$

که در آن ω_i و Ω_i به ترتیب بسامد گذار اتم و میدان است. g_i ثابت جفت‌شدگی بین اتم و میدان و نهایتا χ_i بیانگر خودعملی محیط است. فرض می‌کنیم که قبل از شروع برهم-کنش، زیرسامانه اول در یک برهم‌نهی از حالت‌های اتم-میدان برانگیخته-تک‌فوتونی و پایه-دوفوتونی، و زیرسامانه دوم در حالت پایه-دوفوتونی به صورت زیر قرار داشته باشند:

$$\begin{aligned}|\psi(0)\rangle &= |\psi(0)\rangle_1 \otimes |\psi(0)\rangle_2 \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|e\rangle|1\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\varphi}|g\rangle|2\rangle\right)_1 \otimes (|g\rangle|2\rangle)_2.\end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن $0 \le \theta \le \pi$ به‌طوری‌که به ازای $\theta = 0$ ($\theta = \pi$) اتم در حالت برانگیخته $|e\rangle$ (پایه $|g\rangle$) قرار دارد. در ادامه، با فرض نامیزانی غیرصفر $(\Delta \neq 0)$ و با تاثیر عملگر تحول زمانی مربوط به هر زیرسامانه بر روی حالت اولیه هر کدام از آنها، حالت هر زیرسامانه در زمان دلخواه t به شکل زیر به‌دست می-آید:

$$\begin{aligned}|\psi_{AF}(t)\rangle_1 &= A(t)|e\rangle|1\rangle + B(t)|g\rangle|2\rangle, \\ |\psi_{AF}(t)\rangle_2 &= D(t)|e\rangle|1\rangle + E(t)|g\rangle|2\rangle,\end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن

$$\begin{aligned}A(t) &= e^{\frac{it}{2}\xi}\left(\left(-\frac{i\xi}{k}\sin(kt/2) + \cos(kt/2)\right)\cos(\theta/2) - \frac{ig2\sqrt{2}}{k}\sin(kt/2)\exp(-i\varphi)\sin(\theta/2)\right), \\ B(t) &= e^{-\frac{it\xi}{2}}\left(\left(\frac{i\xi}{k}\sin(kt/2) + \cos(kt/2)\right)\exp(-i\varphi)\sin(\theta/2) - \frac{ig2\sqrt{2}}{k}\sin(kt/2)\cos(\theta/2)\right),\end{aligned} \quad (۴)$$

و نیز

$$\begin{aligned}D(t) &= \frac{-ig2\sqrt{2}}{k}\sin(kt/2)e^{\frac{it\xi}{2}}, \\ E(t) &= e^{\frac{-it\xi}{2}}\left(\frac{i\xi}{k}\sin(kt/2) + \cos(kt/2)\right),\end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن

$$\begin{aligned}k &= \sqrt{\xi^2 + 8g^2}, \\ \xi &= \Delta - 2\chi.\end{aligned} \quad (۶)$$

این دو زیرسامانه $(AF)_i$ با یکدیگر برهم‌کنش ندارند و حالت کلی آن‌ها به‌صورت $|\psi(t)\rangle = |\psi_{AF}(t)\rangle_1 \otimes |\psi_{AF}(t)\rangle_2$ تفکیک-پذیر است. به منظور درهم‌تنیده کردن حالت‌های اتمی، یک اندازه‌گیری حالت بِل (BSM) روی مدهای میدان خروجی از کاواک‌ها انجام می‌دهیم. این فرایند را می‌توان به‌صورت ریاضی با اعمال عملگر برافکنش $\mathrm{P}_\mathrm{F}^- \equiv |\Psi^-\rangle_{\mathrm{FF}}\langle^-\Psi|$ روی $|\psi(t)\rangle$ توصیف کرد، که در آن $|\Psi^-\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,2\rangle - |2,1\rangle)$ یک حالت بِل است [۵]. بنابراین، حالت سامانه اتمی بعد از اعمال عملگر برافکنش، به-صورت $\mathrm{P}_\mathrm{F}^-|\psi(t\rangle = |\Psi^-\rangle_F \otimes |\psi_{\mathrm{AA}}\rangle$ به دست می‌آید که در آن، حالت نابهنجار $|\psi_{AA}\rangle$ برابر است با:

$$|\psi_{\mathrm{AA}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}A(t)E(t)|eg\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}B(t)D(t)|ge\rangle. \quad (۷)$$

بعد از بهنجار کردن $|\psi_{\mathrm{AA}}\rangle$، ماتریس چگالی اتم-اتم به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\rho_{\mathrm{AA}} = \frac{|\psi_{\mathrm{AA}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{AA}}|}{\mathrm{Tr}(|\psi_{\mathrm{AA}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{AA}}|)} \quad (۸)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(|\psi_{AA}\rangle\langle\psi_{AA}|) &= \frac{1}{2}\left(|A(t)|^2|E(t)|^2 + |B(t)|^2|D(t)|^2\right) \\ &\equiv \mathrm{N}.\end{aligned} \quad (۹)$$

با استفاده از معادلات (۹)- (۷) می‌توان احتمال اشغال حالت-های اتم-اتم را به صورت زیر محاسبه کرد:

(۱۰)

$$P_1 = \langle eg|\rho_{\mathrm{AA}}|eg\rangle = \frac{|A(t)|^2|E(t)|^2}{2\mathrm{N}},$$

نمودار ۱: تحول زمانی پارامتر تلاقی (نمودار بالا) و احتمال‌های اشغال ترازهای اتمی (نمودار پایین)، P_1 (نمودار نقطه‌چین قرمز رنگ) و P_2 (نمودار آبی رنگ) به ازای $\theta = \pi/4, \Delta/g = \chi/g = 0$.

(۱۱)

$$P_2 = \langle ge|\rho_{\mathrm{AA}}|ge\rangle = \frac{|B(t)|^2|D(t)|^2}{2\mathrm{N}}.$$

در ادامه، به منظور بررسی میزان درهم‌تنیدگی به وجود آمده بین دو اتم، از معیار تلاقی استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

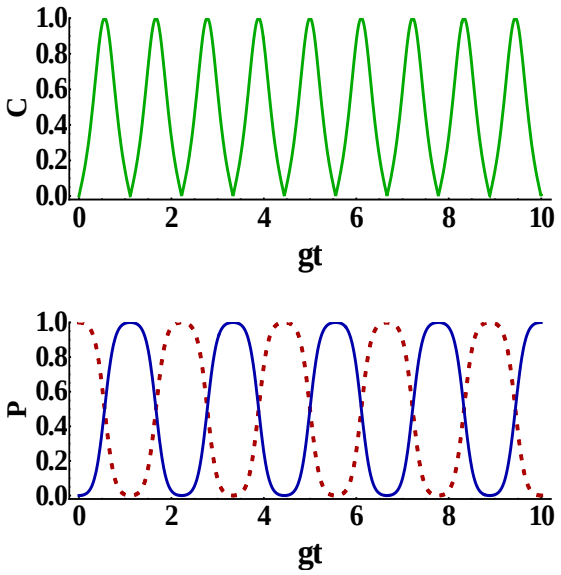
$$C(t)=\max\left\{0,\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_3}-\sqrt{\lambda_4}\right\} \qquad (۱۲)$$

در اینجا λ_i ویژه‌مقادیر (به ترتیب نزولی) ماتریس هرمیتی $\hat{R}=\hat{\rho}\hat{\rho}_s$ هستند، به‌طوری‌که $\hat{\rho}$ ماتریس چگالی کاهش‌یافته اتمی و $\hat{\rho}_s=\hat{\sigma}_y\otimes\hat{\sigma}_y\hat{\rho}^*\hat{\sigma}_y\otimes\hat{\sigma}_y$، که در آن $\hat{\sigma}_y$ یک ماتریس پاولی است. مقادیر تلاقی، بین صفر (برای دو اتم جداپذیر) و یک (برای دو اتم با بیشینه درهم‌تنیدگی) تغییر می‌کند. در نهایت، برای ماتریس چگالی کاهش‌یافته (۸)، تلاقی به صورت زیر به دست می‌آید:

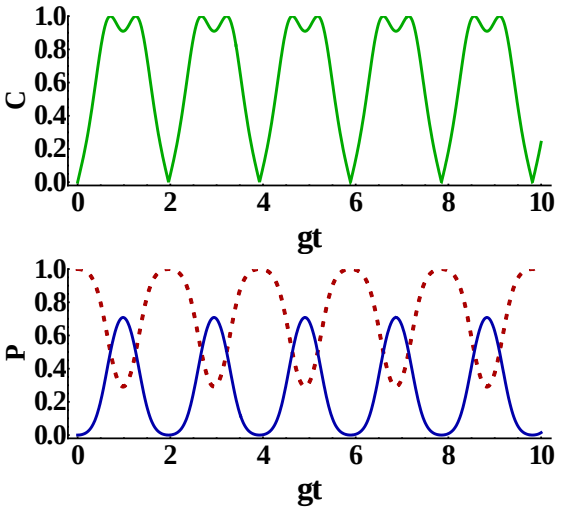
$$C(t)=\max\left\{0,\frac{|A(t)||B(t)||D(t)||E(t)|}{\mathrm{N}}\right\} \qquad (۱۳)$$

۳- نتایج و بحث

شکل ۱ تحول زمانی پارامتر تلاقی و احتمال‌های اشغال P_1 و P_2 به ازای $\theta=\pi/4,\Delta/g=\chi/g=0$ را نشان می‌دهد. تلاقی و احتمال‌های اشغال ترازها رفتار دوره‌ای نسبت به زمان مقیاس‌بندی شده (gt) با دوره تناوب یکسان دارند و در زمان‌هایی که P_1 و P_2 با یکدیگر برابر هستند، تلاقی حداکثر مقدار خود را دارد. در واقع می‌توان نشان داد که در این زمان‌ها حالت اتم-اتم یک حالت بِل است. برای زمان‌هایی که یکی از احتمال‌های اشغال کمینه (در اینجا صفر) است، مقدار تلاقی صفر می‌شود.



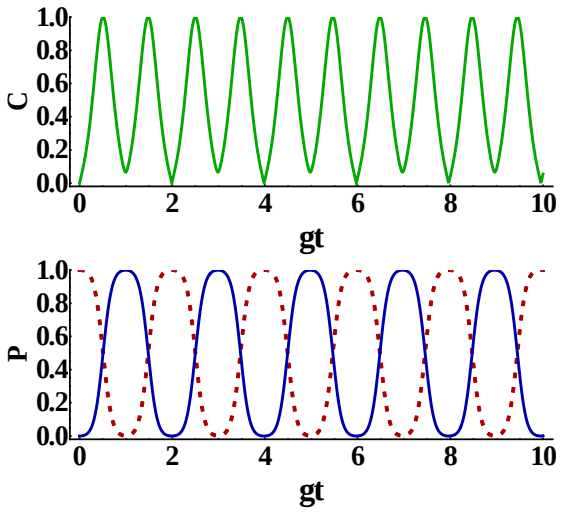
شکل ۲ اثر پارامتر نامیزانی را روی درهم‌تنیدگی و احتمال‌های اشغال نشان می‌دهد.



نمودار ۲: تحول زمانی پارامتر تلاقی (نمودار بالا) و احتمال‌های اشغال (نمودار پایین)، P_1 (نمودار نقطه-چین قرمز رنگ) و P_2 (نمودار آبی رنگ) به ازای $\chi/g=0,\ \varphi=0$ $\Delta/g=1.5$ و $\theta=\pi/4$.

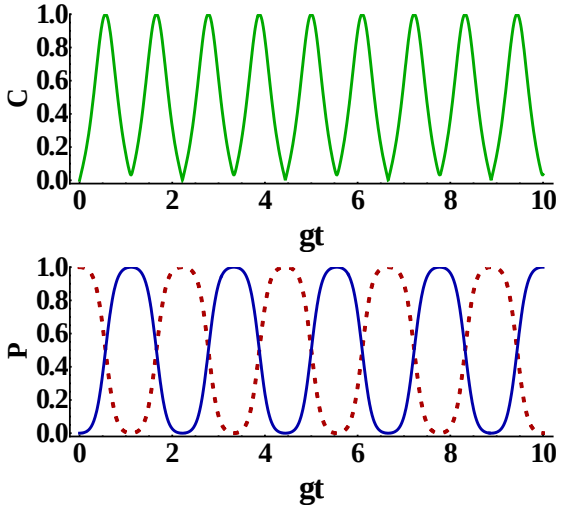
همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مورد نیز درهم‌تنیدگی و احتمال‌های اشغال رفتار دوره‌ای دارند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این حالت، دوره نوسانات درهم‌تنیدگی افزایش یافته است که به معنی زنده‌ماندن درهم‌تنیدگی در مدت زمان بیشتری در یک دوره تناوب است. در یک دوره تناوب، درهم‌تنیدگی از صفر شروع شده و به مقدار بیشینه خود (یعنی یک) می‌رسد، سپس یک نوسان کوچک حول این مقدار بیشینه انجام داده، مجددا افت می‌کند تا به صفر برسد. پیداست که در این حالت، احتمال اشغال P_1 هیچ‌وقت صفر نمی‌شود و هم‌چنین P_2 حداکثر مقدار ۰/۷ را می‌گیرد. ولی مجموع این دو احتمال در تمام زمان‌ها برابر واحد است.

شکل ۳ اثر محیط کِر را روی میزان درهم‌تنیدگی بین دو اتم و احتمال‌های اشغال نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود دوره تناوب نوسانات درهم‌تنیدگی (در مقایسه با شکل ۱) بیشتر شده است. این بدین معنی است که درهم‌تنیدگی برای مدت زمان بیشتری در یک دوره تناوب زنده می‌ماند. البته لازم به ذکر است که در این حالت، میزان افت درهم‌تنیدگی در یک دوره تناوب بیشتر از حالت قبل است (شکل ۲ را ببینید). نتایج بعدی ما (که به دلیل کمبود فضا در اینجا آورده نشده‌اند) نشان می‌دهند که برای مقادیر بزرگتر χ/g، میزان افت درهم‌تنیدگی در یک تناوب و هم‌چنین دوره تناوب کاهش می‌یابند. این اثر تاثیر چندانی بر روی احتمالات اشغال ندارد.



نمودار ۳: تحول زمانی پارامتر تلاقی (نمودار بالا) و احتمال‌های اشغال (نمودار پایین)، P_1 (نمودار نقطه-چین قرمز رنگ) و P_2 (نمودار آبی رنگ) به ازای $\varphi = 0$ $\theta = \pi/4, \Delta/g = 0, \chi/g = 0.7$.

شکل ۴ تاثیر هم‌زمان محیط غیرخطی کِر و پارامتر نامیزانی را روی رفتار درهم‌تنیدگی و احتمال‌های اشغال اتمی نشان می-دهد. در مقایسه با شکل ۲، واضح است که حضور محیط کِر، اثر پارامتر نامیزانی را بر رفتار درهم‌تنیدگی و احتمالات اشغال به‌طور قابل ملاحظه‌ای خنثی کرده است. هرچند دوره تناوب نوسانات اندکی بیشتر شده است. لذا می‌توان گفت که از بین عوامل یاد شده، محیط کِر اثر غالب بر روی درهم‌تنیدگی دارد.



نمودار ۴: تحول زمانی پارامتر تلاقی (نمودار بالا) و احتمال‌های اشغال (نمودار پایین)، P_1 (نمودار نقطه-چین قرمز رنگ) و P_2 (نمودار آبی رنگ) به ازای $\varphi = 0$ و $\theta = \pi/4, \chi/g = 0.7, \Delta/g = 1.5$.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله امکان تبادل درهم‌تنیدگی بین دو اتم در دو کاواک کاملا مجزا و مستقل در حضور محیط کِر را از طریق اعمال یک اندازه‌گیری حالت بِل روی مدهای میدان‌های خروجی کاواک‌ها بررسی کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهند که تحت شرایطی می‌توان حداکثر مقدار درهم‌تنیدگی بین دو اتم $C_{\max} = 1$، را به دست آورد. پارامتر نامیزانی و محیط کِر تاثیری بر این مقدار بیشینه ندارند. رفتار دوره‌ای درهم‌تنیدگی در تمام نمودارها حفظ شده‌است. در تمام حالت‌ها درهم-تنیدگی برای زمان‌هایی که $P_1 = P_2$ است حداکثر می‌شود. می‌توان نشان داد که در این زمان‌ها، حالت اتم-اتم، یک حالت بِل است. در حضور محیط کِر و پارامتر نامیزانی، دوره تناوب تلاقی بیشتر شده‌است. در همه نمودارها، مجموع احتمالات برابر واحد به‌دست آمده است. این مطلب از معادله (۷) نیز قابل برداشت است. زیرا در این مورد، حالت‌های اتمی $|ee\rangle$ و $|gg\rangle$ سهمی در تابع حالت اتم-اتم ندارند. بنابراین انتظار این است که فقط احتمال اشغال‌های (۱۰) و (۱۱) مورد نظر باشند که باید مجموع آنها برابر یک شود.

مراجع

[1] F. Benatti, R. Floreanini, M. Piani, Phys. Rev. Lett. **91**, 070402, 2003.
[2] S-B Zheng, Phys. Rev. A **77,** 044303, 2008.
[3] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89, 1963.
[4] M. S. Abdalla et al, Chaos, Solitons and Fractals **36**, 405, 2008.
[5] Q. H. Liao et al, Eur. Phys. J. D **61**, 475, 2011.
[6] K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2248, 1998.
[7]