بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

اتم سه‌ترازی در حال حرکت در برهم‌کنش با دو مد جفت‌شده: درهم‌تنیدگی کوانتومی

محمّد جواد فقیهی[۱و۲و۳]، محمّد کاظم توسّلی[۱و۲] و محسن حاتمی[۴]

[۱] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
[۲] آزمایشگاه پردازش اطّلاعات کوانتومی و رمزنگاری، دانشگاه یزد، یزد
[۳] گروه فیزیک و فوتونیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، ماهان، کرمان
[۴] دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده – در این مقاله مدلی برای یک اتم سه‌ترازی (در پیکربندی نوع Λ) در حال حرکت که به‌طور هم‌زمان با دو مد میدان برهم‌کنش می‌کند ارائه می‌شود. با درنظرگرفتن شرایط اولیه برای اتم و میدان، تحول زمانی بردار حالت سامانه به‌طور تحلیلی محاسبه می‌شود. آن‌گاه، دینامیک درهم‌تنیدگی با استفاده از رهیافت آنتروپی کاهش‌یافته وان نیومن مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج عددی نشان می‌دهند که بازه و بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی را می‌توان با پارامتر ساختار مد میدان (p) کنترل کرد.

کلید واژه- مدل جینز-کامینگز، اتم سه‌ترازی در حال حرکت، میدان دو مدی، تبدیل معکوس پارامتری، درهم‌تنیدگی کوانتومی.

Moving Three-Level Atom Interacting with Two Coupled Modes: Quantum Entanglement

Mohammad Javad Faghihi[1,2,3], Mohammad Kazem Tavassoly[1,2] and Mohsen Hatami[4]

[1] Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd
[2] The Laboratory of Quantum Information Processing, Yazd University, Yazd
[3] Physics and Photonics Department, Graduate University of Advanced Technology, Mahan, Kerman
[4] Faculty of Physics, Shiraz University of Technology, Shiraz

Abstract- In this paper, a model for studying the interaction between a motional three-level atom (in Λ configuration) and two-mode field injected simultaneously in a bichromatic cavity is presented. Under particular initial conditions, which may be prepared for the atom and the field, the time evolution of state vector of the entire system is analytically obtained. Then, dynamics of entanglement is evaluated by using the von Neumann reduced entropy. The numerical results show that, the duration and the maximum amount of the entanglement can be suitably tuned by selecting the proper field-mode structure parameter p.

Keywords: Jaynes-Cummings model, Moving three-level atom, Bimodal field, Parametric down conversion, Quantum entanglement.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-02]

۱- مقدمه

درهم‌تنیدگی، یک هم‌بستگی کوانتومی ناگسستنی بین اجزای یک سامانه‌ی چندتایی، یکی از ویژگی‌های اساسی سامانه‌های کوانتومی است که نقشی اساسی در تکنولوژی‌های اطّلاعات جدید ایفا می‌کند [۱]. وجود کاربردهای زیاد درهم‌تنیدگی در دانش اطّلاعات کوانتومی مثل محاسبات و ارتباطات کوانتومی [۲]، مبادله‌ی درهم‌تنیدگی[1] [۳]، اندازه‌گیری‌های حسّاس [۴] و دوربری کوانتومی[2] [۵] موجب شده است که امروزه تولید حالت‌های درهم‌تنیده مورد توجّه قرار گیرد. برهم‌کنش نور (فوتون) با ماده (اتم) از جمله روش‌هایی است که به تولید این حالت‌ها منجر می‌شود [۶].

توصیف دقیق این دسته از برهم‌کنش‌ها بر پایه‌ی مدل جینز-کامینگز صورت می‌گیرد [۷]. این مدل الگویی را منطبق با مکانیک کوانتومی برای یک اتم دوترازی در برهم‌کنش با یک میدان الکترومغناطیسی تک‌مد ارائه می‌دهد. بر اساس این مدل و تعمیم‌های آن، پژوهش‌های متعددی مبنی بر تولید حالت‌های درهم‌تنیده‌ی اتم-میدان گزارش شده است [۸].

در این مجال، تعمیم‌هایی شامل اتم سه‌ترازی، حرکت اتم و میدان دومدی جفت‌شده بر مدل جینز-کامینگز درنظرگرفته می‌شوند که هرکدام از آن‌ها از نظر فیزیکی درخور توجّه‌اند. برای نمونه، اخیراً در پژوهش‌های اطّلاعات کوانتومی نشان داده شده است که سامانه‌های سه‌تایی (اتم‌های سه‌ترازی) ویژگی‌های برجسته‌ای نسبت به سامانه‌های دوتایی (اتم‌های دوترازی) از خود نشان می‌دهند [۹]. هم‌چنین، آزمایش‌های متعددی حرکت اتم درون کاواک را - ازاین‌رو که اتم در حین برهم‌کنش در کاواک ساکن نیست- تأیید کرده‌اند [۱۰].

در این پژوهش، تلاش می‌کنیم توصیفی دقیق از برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی در حال حرکت با دو مد جفت‌شده‌ی میدان ارائه کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم که حرکت اتم در کنترل ویژگی‌های غیرکلاسیکی، مؤثّر است.

[1] Entanglement swapping
[2] Quantum teleportation

۲- معرّفی مدل و حل آن

یک اتم سه‌ترازی نوع Λ را چنان در نظر می‌گیریم که با دو مد جفت‌شده کاواک، که با بسامدهای Ω_1 و Ω_2 نوسان می‌کنند، برهم‌کنش کند و در راستای z در حال حرکت باشد. هم‌چنین با فرض وجود برهم‌کنش میدان-میدان، تبدیل معکوس پارامتری را در نظر می‌گیریم. در سامانه‌ی اتمی مورد بررسی، ترازهای اتمی با نماد $|j\rangle$ و انرژی ω_j نشان‌داده می‌شوند که در آن گذار $|2\rangle \to |3\rangle$ گذار ممنوع تلقّی می‌شود. ازاین‌رو، هامیلتونی برهم‌کنش در تقریب موج چرخان (RWA) به‌شکل زیر خواهد بود ($\hbar = c = 1$):

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{AF} + \hat{H}_{FF} \qquad (۱)$$

که در آن عبارت‌های مربوط به اتم و میدان به‌صورت

$$\hat{H}_A = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \hat{\sigma}_{jj}, \quad \hat{H}_F = \sum_{j=1}^{2} \Omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \qquad (۲)$$

و هامیلتونی برهم‌کنش به‌شکل

$$\begin{aligned} \hat{H}_{AF} &= \sum_{j=1}^{2} \Big[g_1^{(j)} f_1^{(j)}(z)(\hat{a}_j\, \hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{21} \hat{a}_j^\dagger) \\ &\quad + g_2^{(j)} f_2^{(j)}(z)(\hat{a}_j\, \hat{\sigma}_{13} + \hat{\sigma}_{31} \hat{a}_j^\dagger) \Big] \qquad (۳) \\ \hat{H}_{FF} &= \mathbf{g}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \end{aligned}$$

خواهند بود. در روابط بالا، عملگر نردبانی اتمی به‌صورت $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ تعریف می‌شود. $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ عملگرهای بوزونی نابودی و آفرینش، $g_1^{(j)}$ و $g_2^{(j)}$ ثابت‌های جفت‌شدگی بین اتم و میدان برای مد j ام هستند و $\mathbf{g}$ به ثابت جفت‌شدگی در برهم‌کنش میدان-میدان اشاره دارد. هم‌چنین $f_1^{(j)}(z)$ و $f_2^{(j)}(z)$، توابع مد میدان کاواک، اثر حرکت اتم در برهم‌کنش را نشان می‌دهند.

برای یافتن تابع موج سامانه از رهیافت عملگر تحوّل زمانی استفاده می‌کنیم. پیش از آن، لازم است که از تبدیلات کانونیک زیر بهره‌مند شویم:

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_1 \cos\theta + \hat{b}_2 \sin\theta, \quad \hat{a}_2 = \hat{b}_2 \cos\theta - \hat{b}_1 \sin\theta \qquad (۴)$$

در این رابطه، عملگرهای $\hat{b}$ و $\hat{b}^\dagger$ مشابه عملگرهای بوزونی $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ رفتار می‌کنند. هم‌چنین، θ پارامتری است که با توجّه به ویژگی‌های هامیلتونی سامانه تعیین خواهد

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-02]

شد. با جانشینی تبدیلات کانونیک (۴) در هامیلتونی سامانه، شکل نهایی آن به‌شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \\
&\hat{H}_0 = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \hat{\sigma}_{jj} + \sum_{j=1}^{2} \mathbf{\Omega}_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \\
&\hat{H}_1 = \sum_{j=1}^{2} \Big[\mu_1^{(j)} f_1^{(j)}(z)(\hat{b}_j\, \hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{21} \hat{b}_j^\dagger) \\
&\quad + \mu_2^{(j)} f_2^{(j)}(z)(\hat{b}_j\, \hat{\sigma}_{13} + \hat{\sigma}_{31} \hat{b}_j^\dagger) \Big]
\end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Omega}_1 = \Omega_1 \cos^2\theta + \Omega_2 \sin^2\theta - \mathbf{g} \sin 2\theta \\
&\mathbf{\Omega}_2 = \Omega_1 \sin^2\theta + \Omega_2 \cos^2\theta + \mathbf{g} \sin 2\theta \\
&\mu_k^{(1)} = g_k^{(1)} \cos\theta - g_k^{(2)} \sin\theta \\
&\mu_k^{(2)} = g_k^{(1)} \sin\theta + g_k^{(2)} \cos\theta, \quad k = 1,2 \\
&\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\mathbf{g}}{\Omega_2 - \Omega_1} \right) \\
&\mathbf{g} = \frac{\delta(\Omega_2 - \Omega_1)}{1-\delta^2}, \quad \frac{g_1^{(1)}}{g_1^{(2)}} = \delta = \frac{g_2^{(1)}}{g_2^{(2)}}
\end{aligned} \tag{۶}$$

برای مقاصد بعدی، مناسب است که محاسبات خود را در تصویر برهم‌کنش دنبال کنیم. از این رو، هامیلتونی سامانه در این تصویر به‌شکل زیر ساده می‌شود:

$$V_I(t) = \mu f(z) \left(\hat{b}_2 \hat{\sigma}_{12}\, \mathrm{e}^{-i\Delta_2 t} + \gamma \hat{b}_2 \hat{\sigma}_{13}\, \mathrm{e}^{-i\Delta_3 t} \right) + \text{c.c.} \tag{۷}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
&\mu = g\sqrt{1+\delta^2}, \quad \gamma = \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu_1^{(2)}}, \\
&\Delta_k = \mathbf{\Omega}_2 - (\omega_1 - \omega_k), \quad k = 2,3
\end{aligned} \tag{۸}$$

برای سادگی در نوشتار فرض کرده‌ایم $g_1^{(2)} = g$. در نهایت باید شکل دقیق توابع مد میدان را که بیان‌گر حرکت اتم هستند مشخّص کنیم. با فرض محدودشدن حرکت اتم در راستای z، این توابع عموماً به‌شکل $f(vt)$ درنظرگرفته می‌شوند که در آن v بیان‌گر سرعت حرکت اتمی است. برای مدهای TEM_{mnp} شکل این توابع به‌صورت [۱۱]:

$$f_i(z) = \sin(p_i \pi v t / L) \tag{۹}$$

خواهد بود که در آن p_i تعیین‌کننده‌ی تعداد نصف طول موج مد میدان درون یک کاواک به‌طول L است.

یافتن تابع موج سامانه‌ی اتم-میدان با استفاده از رهیافت عملگر تحوّل زمانی نیازمند تابع موج سامانه در لحظه‌ی شروع برهم‌کنش است. از این‌رو، فرض می‌کنیم اتم در حالت برانگیخته و میدان در حال همدوس استاندارد باشد:

$$\begin{aligned}
&|\psi(0)\rangle = |1\rangle \otimes |\alpha,\beta\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} q_n q_m |1,n,m\rangle, \\
&q_n = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}}, \quad q_m = \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2} \right) \frac{|\beta|^n}{\sqrt{m!}}
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

حال اگر عملگر تحوّل زمانی به‌دست‌آمده در (۷) بر بردار حالت اولیه سامانه اثر کند، تابع موج سامانه در هر لحظه‌ی دلخواه t به‌شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} q_n q_m \Big[& A(n,m,t)|1,n,m\rangle \\
& + B(n,m+1,t)|2,n,m+1\rangle \\
& + C(n,m+1,t)|3,n,m+1\rangle \Big]
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

که در این رابطه A، B و C دامنه‌های احتمال اتمی هستند که پس از محاسباتی چند، به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&A(t) = \cos\left[\sqrt{\left(|\Theta_1|^2 + |\Theta_2|^2 \right)(m+1)} \right], \\
&B(t) = \frac{\Theta_1^*}{i\sqrt{\left(|\Theta_1|^2 + |\Theta_2|^2 \right)}} \\
&\quad \times \sin\left[\sqrt{\left(|\Theta_1|^2 + |\Theta_2|^2 \right)(m+1)} \right], \\
&C(t) = \frac{\Theta_2^*}{i\sqrt{\left(|\Theta_1|^2 + |\Theta_2|^2 \right)}} \\
&\quad \times \sin\left[\sqrt{\left(|\Theta_1|^2 + |\Theta_2|^2 \right)(m+1)} \right]
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن

$$\Theta_k(t) = \mu \int_0^t f(vt') \exp(-i\Delta_{k+1} t') dt', \quad k = 1,2 \tag{۱۳}$$

با فرض $p_1 = p = p_2$ و $v = gL/p$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\Theta_1(t) = \mu \Bigg[& \frac{\sin\left(\frac{p-\Delta_2}{2} t \right)}{i(p-\Delta_2)} \exp\left(i\, \frac{p-\Delta_2}{2} t \right) \\
& - \frac{\sin\left(\frac{p+\Delta_2}{2} t \right)}{i(p+\Delta_2)} \exp\left(-i\, \frac{p+\Delta_2}{2} t \right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-02]

یادآور می‌شویم که $\Theta_2(t)$ به‌طور مشابه محاسبه می‌شود.

۳- درهم‌تنیدگی کوانتومی

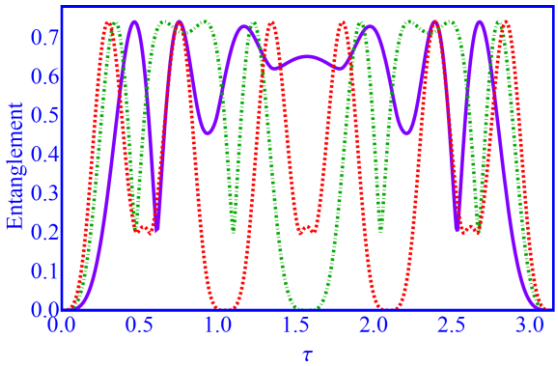
تابع موج (۱۱) نشان از وجود درهم‌تنیدگی بین اتم و میدان دارد. برای محاسبه میزان درهم‌تنیدگی از آنتروپی کاهش‌یافته‌ی وان نیومن بهره می‌گیریم [۱۲]. برطبق این تعریف از آنتروپی، آنتروپی‌های اتم و میدان به‌طور مستقل محاسبه و با عملگرهای چگالی کاهش‌یافته‌ی متناظرشان به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$S_{A(F)} = -\mathrm{Tr}_{A(F)}\left(\hat{\rho}_{A(F)} \ln \hat{\rho}_{A(F)}\right) \qquad (۱۵)$$

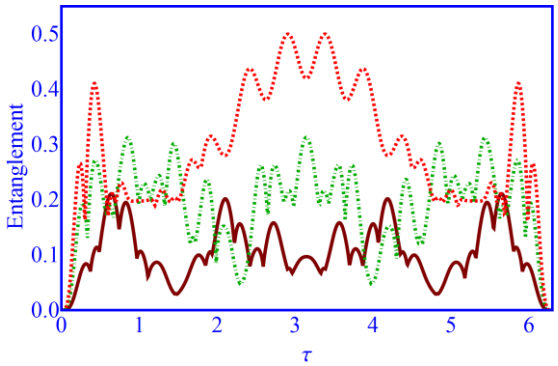
که در آن $\hat{\rho}_{A(F)}$ بیان‌گر ماتریس چگالی اتم (میدان) است. با استفاده از رهیافت ارائه شده در [۱۳]، آنتروپی سامانه‌ی اتم- میدان حاضر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_A(t) = S_F(t) = -\sum_{j=1}^{3} \xi_j \ln \xi_j \qquad (۱۶)$$

که در آن ξ_j ها ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی زیرسامانه‌ی اتمی هستند.



شکل ۱: درهم‌تنیدگی برحسب زمان مشخصه‌ی $\tau = gt$ به‌ازای $|\alpha|^2 = 10 = |\beta|^2$، $\delta = 0.1$، $\gamma = 1$، $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$: $p = 2$ (پیوسته)، $p = 4$ (نقطه‌فاصله)، $p = 6$ (خط چین).



شکل ۲: درهم‌تنیدگی برحسب زمان مشخصه‌ی $\tau = gt$ به‌ازای $|\alpha|^2 = 10 = |\beta|^2$، $\delta = 0.1$، $\gamma = 1$، $\Delta_2 = 7$، $\Delta_3 = 15$: $p = 2$ (پیوسته)، $p = 4$ (نقطه‌فاصله)، $p = 6$ (خط چین).

۴- نتیجه‌گیری

نتایج عددی نشان می‌دهند که درهم‌تنیدگی کوانتومی بین زیرسامانه‌ها در حضور پارامترهای نامیزانی کاهش می‌یابد. هم‌چنین، مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر ساختار مد میدان، p، درهم‌تنیدگی بین اتم و میدان به‌طور چشم‌گیری افزایش می‌یابد. به‌طور خلاصه، شکل‌های ۱و۲ که حرکت اتم را برای سه وضعیت نشان می‌دهند بیان‌گر این واقعیت هستند که با انتخاب مناسب پارامتر ساختار مد میدان، میزان درهم‌تنیدگی بین اتم و میدان قابل کنترل است. محاسبه‌ی سایر شاهدهای غیرکلاسیکی نیز، که انجام شده است، مؤیّد غیرکلاسیکی‌بودن سامانه‌ی حاضر است.

مراجع

[1] Benenti G., Casati G. and Strini G. "*Principles of Quantum Computation and Information*", Vols I and II, Singapore: World Scientific, (2007).

[2] Bennett C.H. and Divincenzo D.P. **Nature** 404 (2000) 247.

[3] Abdi M., Pirandola S., Tombesi P. and Vitali D. **Phys. Rev. Lett.** 109 (2012) 143601.

[4] Richter T. and Vogel W. **Phys. Rev. A** 76 (2007) 053835.

[5] Bennett C.H., Brassard G., Crepeau C., Jozsa R., Peres A. and Wootters W.K. **Phys. Rev. Lett.** 70 (1993) 1895.

[6] Guo J.-L., Sun Y.B. and Li Z.D. **Opt. Commun.** 284 (2011) 896;
Abdel-Aty M. and Obada A.-S.F. **Eur. Phys. J. D** 23 (2003) 155;
Obada A.-S.F., Hanoura S.A. and Eied A.A. **Laser Phys.** 23 (2013) 025201.

[7] Jaynes E.T. and Cummings F.W. **Proc. IEEE.** 51 (1963) 89;
Cummings F.W. **Phy. Rev.** 140 (1965) A1051.

[8] Faghihi M.J. and Tavassoly M.K. **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.** 45 (2012) 035502;
Faghihi M.J., Tavassoly M.K. and Hooshmandasl M.R. **J. Opt. Soc. Am. B** 30 (2013) 1109.

[9] Bechmann-Pasquinucci H. and Peres A. **Phys. Rev. Lett.** 85 (2000) 3313.

[10] Meschede D., Walther H. and Mouller G. **Phys. Rev. Lett.** 54 (1985) 551.

[11] Schlicher R.R. **Opt. Commun.** 70 (1989) 97.

[12] Audretsch J.; "*Entangled Systems*", Wiley, (2007).

[13] Faghihi M.J. and Tavassoly M.K. **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.** 46 (2013) 145506.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-02]