اثر سیاه‌چاله‌های اپتیکی شوارتز شیلد بر آهنگ گسیل خودبخودی یک اتم دوترازه

احسان عمو قربان[۱و۲]، علی مهدی‌فر[۱و۲] و مهناز توکلی کچی[۱]

[۱]دانشگاه شهرکرد، دانشکده علوم، گروه فیزیک

[۲]دانشگاه شهرکرد، گروه پژوهشی فوتونیک

چکیده – در این مقاله به منظور بررسی اثرات کوانتومی سیاه‌چاله‌های اپتیکی به محاسبه گسیل خودبه‌خودی یک اتم دوترازی برانگیخته در حضور سیاه‌چاله‌های اپتیکی شوارتز شیلد که بیشترین شباهت را به سیاه‌چاله‌های واقعی دارند می‌پردازیم. با توجه به اینکه آهنگ گسیل خودبه‌خودی به قسمت موهومی تانسور گرین سامانه بستگی دارد و از طرف دیگر سیاه‌چاله‌های شوارتز شیلد ساختار استوانه‌ای شکل با ثابت‌های اپتیکی ناهمسانگرد و ناهمگن دارند، بنابراین با الگوسازی سیاه‌چاله مزبور توسط تعدادی لایه استوانه‌ای هم‌مرکز به محاسبه‌ی تانسور گرین سامانه و متعاقبا آهنگ گسیل خودبه‌خودی می‌پردازیم.

کلید واژه- آهنگ گسیل خودبه‌خودی، تانسور گرین، سیاه‌چاله اپتیکی شوارتز شیلد

The Effect of optical Schwarzschild black holes on spontaneous emission of a two-level atom

Ehsan Amoghorban[1, 2], Ali Mahdifar[1, 2], Mahnaz Tavakli Kachi[1]

[1] Department of Physics, Faculty of Science, Shahrekord University

[2] Photonics Research Group, Shahrekord University

Abstract- In this paper, in order to investigate the quantum effects of optical Schwarzschild black holes, we calculate the spontaneous emission of an excited two-level atom in the vicinity of optical Schwarzschild black holes which has the most resemble with the real black holes. Given that the spontaneous emission rate depends on the imaginary part of the Green tensor of system, and on the other hand Schwarzschild black holes have a cylindrical structure with the inhomogeneous and anisotropic optical parameters. So, we calculate the Green tensor of system and subsequently the spontaneous emission rate by modeling aforementioned black hole via some concentric cylindrical layers.

Keywords: Spontaneous emission rate, Green tensor, Optical Schwarzschild black hole

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت **www.opsi.ir** قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

یکی از جذاب‌ترین پیش بینی‌های نظریه‌ی نسبیت عام وجود اجرام کیهانی چگال است که سیاه‌چاله نامیده می‌شوند. بررسی این اجرام سماوی توسط منجمان عملا با دشواری بسیاری روبرو است. تاکنون دو روش برای شبیه‌سازی سیاه‌چاله‌ها توسط امواج الکترومغناطیس و متاماده مطرح شده است [۱]. مطابق با نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین چگالی ماده-انرژی موجب خمیدگی فضا-زمان و حرکت پیچیده ماده و نور در امتداد مسیرهای ژئودزیکی می‌شوند که دیگر خطوط مستقیم نیستند. چنین رفتاری بسیار شبیه به انتشار نور در یک فضای تهی خمیده یا در فضای تخت در حضور مواد ناهمگن است [۲]. بنابراین با کمک متامواد و مقایسه ضریب شکستش با متریک یک سیاه‌چاله می‌توان به شبیه‌سازی آن پرداخت. روش دیگر استفاده از تشابه میان مکانیک و اپتیک است که از اصل کمترین کنش برای حرکت ذره در پتانسیل‌های دلخواه و اصل فرما برای انتشار نور در محیط‌های ناهمگن حاصل می‌شود. این قیاس امکان معرفی سیاه‌چاله‌های الکترومغناطیسی را که شعاع افق رویداد آن‌ها تنها با مرز ماده تعیین می‌شود را فراهم می‌آورد. اگرچه این سیاه‌چاله‌های الکترومغناطیسی پاسخ معادلات اینشتین نیستد اما همچنان همانند یک جسم سیاه الکترومغناطیسی به عنوان یک جاذب بسیارخوب عمل می‌کند [۱]. براین اساس، ناریمانو و کیلدشو یک سیاه‌چاله اپتیکی را مبتنی بر ساختارهای متامواد مطرح کردند [۱]. تحلیل‌های نظری و شبیه سازی‌های عددی این گروه نشان می‌داد که همه‌ی امواج الکترومغناطیسی فرودی در دام سیاه‌چاله اپتیکی می‌افتند و در نهایت جذب می‌شوند. مشابه با الگوی قبل نیز یک سیاه‌چاله الکترومغناطیسی توسط گروه چن معرفی شد [۳]. این سیاه‌چاله مصنوعی به کمک یک ساختار استوانه‌ای شکل متشکل از تعدادی لایه هم‌مرکز با ضخامت‌های مساوی طراحی شده بود.

بیشتر بررسی‌های نظری و شبیه سازی‌های سیاه‌چاله اپتیکی در حوزه‌ی کلاسیک انجام شده است و به‌ندرت ویژگی‌های کوانتومی سیاه‌چاله‌های اپتیکی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. اخیرا گروه ما [۴]، مبتنی بر الگوی گروه چن اثر کوانتومی سیاه‌چاله‌ی اپتیکی را بر گسیل خودبخودی یک اتم دوترازی برانگیخته که در مجاورت آن واقع شده بود بررسی کرده است. بدین منظور ابتدا سیاه‌چاله اپتیکی توسط تعداد زیادی لایه‌های استوانه‌ای شکل هم‌مرکز نازک الگوسازی شد، به طوری که تابع گذردهی الکتریکی هر لایه ثابت ولی در راستای شعاعی مقادیر آن‌ها متناسب با عکس مربع فاصله از مرکز کاهش می‌یابد. در ادامه با استفاده از کوانتش میدان‌های الکترومغناطیسی به روش پدیده‌شناختی، گسیل خودبخودی یک اتم دو ترازه برانگیخته که در مجاورت سیاه‌چاله اپتیکی واقع است را محاسبه کردیم. در آنجا نشان داده شد که عملکرد سیاه‌چاله‌های اپتیکی در این حوزه همانند سیاه‌چاله های واقعی نیست. بعلاوه در مرجع[۵] با استفاده از سنجه منفیت، به بررسی درهم‌تنیدگی دو اتم دوترازی برانگیخته در مجاورت سیاه‌چاله‌های اپتیکی پرداخته شد. از آنجا که سیاه‌چاله‌های مزبور پاسخ معادلات اینشتین نیستند لذا تشابه با سیاه‌چاله‌های واقعی کمی دور از انتظار است. به عبارت دیگر این سیاه چاله‌ها یک جاذب الکترومغناطیسی همه سویی را پیشنهاد می‌کنند. در این مقاله محاسبات قبلی خود را برای وضعیتی که در آن سیاه‌چاله اپتیکی پیشنهادی پاسخ معادلات اینشتین نیز هستند تعمیم می‌دهیم. با توجه به این که پارامترهای اپتیکی سامانه مزبور از متریک شوارتز شیلد به‌دست می‌آیند، بنابراین توابع گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی سیاه‌چاله اپتیکی تانسور هستند. اگرچه در این‌جا با محاسبات بسیار پیچیده روبرو هستیم ولی الگوی مزبور بیشترین همخوانی را با سیاه‌چاله‌های واقعی دارد.

۲- معادلات پایه

. مطابق با مرجع [۶]، ساختارهای استوانه‌ای شکل با پارامترهای اپتیکی ناهمسانگرد، می‌توانند سیاه‌چاله‌های اپتیکی شوارتز شیلد را برای ما فراهم کنند. مؤلفه‌های تانسور گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی این سیاه‌چاله‌ها در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\varepsilon_r = \mu_r = 1, \varepsilon_\varphi = \mu_\varphi = \varepsilon_z = \mu_z = (1-\frac{L}{r})^{-1}, \quad (۱)$$

که در آن پارامتر L افق رویداد سیاه‌چاله است. به وضوح مشاهده می‌کنیم که در اینجا سیاه‌چاله اپتیکی بیانگر یک

محیط مغناطودی‌الکتریک با پارامترهای اپتیکی ناهمسانگرد هستند.

برای بررسی آهنگ گسیل خودبه‌خودی یک اتم دوترازه برانگیخته که مطابق شکل ۱ در مجاورت سیاه‌چاله معرفی شده در بالا قرار دارد، دامنه واپاشی تراز برانگیخته $C_u(t)$ را در رژیم جفت‌شدگی ضعیف محاسبه می‌کنیم. مطابق نتایج به‌دست آمده در مرجع [۴]، [۵] و [۷]، دامنه واپاشی $C_u(t)$ به صورت $\exp\left[\left(-\frac{1}{2}\Gamma + i\delta\omega\right)\right]$ به دست می‌آید که در آن Γ بیانگر آهنگ گسیل خودبخودی اتم دو ترازی و $\delta\omega$ جابجایی لمب است که به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\Gamma = \frac{2\omega_A^2\, \mathbf{d}_i\, \mathbf{d}_j}{\hbar\varepsilon_0 c^2}\, \mathrm{Im}\, \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{ij}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, \omega_A), \qquad (۲)$$

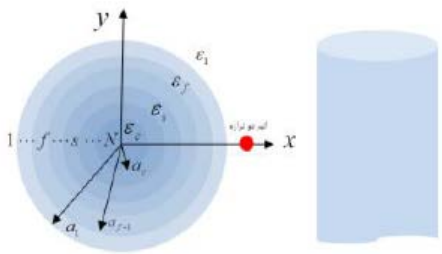
$$\delta\omega = \frac{\omega_A^2\, \mathbf{d}_i\, \mathbf{d}_j}{\hbar\pi\varepsilon_0 c^2}\, P\int_0^\infty d\omega\, \frac{\mathrm{Im}\, \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{ij}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, \omega)}{\omega - \omega_A}. \qquad (۳)$$

در این‌جا P مقدار اصلی کوشی، ω_A بسامد گذار اتم و $\overline{\overline{\mathbf{G}}}$ تانسور گرین سامانه است که در معادله دیفرانسیل

(۴)

$$\left(\nabla\times\overline{\overline{\mu}}^{-1}\cdot\nabla\times - \frac{\omega^2}{c^2}\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\right)\overline{\overline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \overline{\overline{1}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

صدق می‌کند. مشاهده می‌کنیم که برای محاسبه‌ی گسیل خودبخودی اتم برانگیخته نیاز به تانسور گرین سامانه مزبور داریم. به منظور سادگی محاسبات تانسور گرین، سیاه‌چاله اپتیکی مزبور را توسط $N-1$ لایه استوانه‌ای هم‌مرکز که گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی هر لایه ثابت ولی همچنان ناهمسانگرد است الگوسازی می‌کنیم.



شکل۱: نمایی از ساختار استوانه‌ای شکل و سطح مقطع عرضی سیاه‌چاله اپتیکی.

۳- تانسور گرین

به منظور تعیین تانسور گرین سامانه مزبور از تعمیم روابط موجود در مرجع [۸] به محیط‌های ناهمسانگرد استفاده می‌کنیم. با معرفی پتانسیل اسکالر ψ، معادله دیفرانسیل برداری (۴) به یک معادله دیفرانسیل اسکالر برحسب ψ کاهش می‌یابد. اکنون با استفاده از روش جداسازی متغیرها کلی‌ترین پاسخ این معادله به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\psi_{\substack{e\\o}\eta_f}(h) = \sum_n \int dh\, a_n(h)\, Z_\nu(\eta_f r) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n\phi) \times \exp(ihz), \qquad (۵)$$

که در آن $a_n(h)$ ضریب بسط، $Z_\nu(\eta_f r)$ توابع بسل، $\eta_f^2 = k_{t,f}^2 - h'^2$ و $k_{t,f} = \omega\sqrt{\varepsilon_{\varphi,f}\mu_{z,f}}$ است و متغیرهای دیگر به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\nu = n\sqrt{\frac{\varepsilon_{\varphi,f}}{\varepsilon_{r,f}}}, \quad h' = h\sqrt{\frac{\varepsilon_{\varphi,f}}{\varepsilon_{r,f}}}. \qquad (۶)$$

در این‌جا f مکان لایه‌های مختلف را برچسب می‌زند. اکنون با استفاده از رابطه (۴)، ویژه توابع متعامد تعمیم یافته‌ی $\mathbf{M}_{\substack{e\\o}\nu\eta_f}(h)$ و $\mathbf{N}_{\substack{e\\o}\nu\eta_f}(h)$ که به عنوان پایه‌های فضا بکار برده می‌شوند به صورت زیر به‌دست می‌آیند

(۷)

$$\mathbf{M}_{\substack{e\\o}\nu\eta_f}(h) = \left[\mp\frac{nZ_\nu(\eta_f r)}{r}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n\phi)\hat{r} - \frac{dZ_\nu(\eta_f r)}{\mu_t dr}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n\phi)\hat{\phi}\right] \times \exp(ihz),$$

$$\mathbf{N}_{\substack{e\\o}\nu\eta_f}(h) = \frac{1}{k_{t,f}}\left[ih\frac{dZ_\nu(\eta_f r)}{dr}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n\phi)\hat{r} \mp \frac{ihn}{r}Z_\nu(\eta_f r)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n\phi)\hat{\phi} + \frac{\eta^2}{\mu_t}Z_\nu(\eta_f r)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n\phi)\hat{z}\right]\exp(ihz),$$

که در آن μ_t نشان دهنده‌ی مولفه‌ی μ_φ یا μ_z تانسور تراوایی مغناطیسی است. حال با بسط تانسور گرین برحسب این ویژه توابع متعامد تعمیم یافته و انجام محاسبات طولانی و پیچیده، تانسور گرین در ناحیه ۱ برای یک سیاه‌چاله با ساختار استوانه‌ای که پارامترهای اپتیکی ناهمسانگرد آن توسط رابطه (۱) توصیف می‌شوند به شکل زیر به‌دست می‌آید

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}}^{(11)}_{es}(r,r')=\frac{i\,\mu_{t,f}}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dh\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-\delta_n^0)}{\eta_1^2}\times\Big[C_{1H}^{11'}\mathbf{M}^{(1)}_{\substack{e\\o}n\eta_1}(h)\mathbf{M}'^{(1)}_{\substack{e\\o}n\eta_1}(-h)+C_{1V}^{11'}\mathbf{N}^{(1)}_{\substack{e\\o}n\eta_1}(h)\mathbf{N}'^{(1)}_{\substack{e\\o}n\eta_1}(-h)+C_{2H}^{11'}\mathbf{N}^{(1)}_{\substack{o\\e}n\eta_1}(h)\mathbf{M}'^{(1)}_{\substack{o\\o}n\eta_1}(-h)+C_{2V}^{11'}\mathbf{M}^{(1)}_{\substack{o\\e}n\eta_1}(h)\mathbf{N}'^{(1)}_{\substack{o\\o}n\eta_1}(-h)\Big]. \quad (۸)$$

ضرایب بسط تعریف شده در رابطه بالا با اعمال شرایط مرزی روی مولفه‌های مماسی میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی در عبور از هر لایه به‌دست می‌آیند. به سادگی می‌توان نشان داد که این ضرایب از یک رابطه بازگشتی طولانی برحسب ماتریس تراگسیل F_{jm}^{v} که در مرجع [۸] معرفی شده است به‌دست می‌آیند. در این مقاله ماتریس تراگسیل F_{jm}^{v} برای ساختار استوانه‌ای با پارامترهای اپتیکی ناهمسانگرد به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$F_{jm}^{v}=\begin{bmatrix}\pm\frac{\mu_{t,j}\xi_j H_v^{(1)}(\eta_j a_m)}{a_m} & \frac{\partial\left[H_v^{(1)}(\eta_j a_m)\right]}{\partial a_m} & \pm\frac{\mu_{t,j}\xi_j J_v(\eta_j a_m)}{a_m} & \frac{\partial\left[J_v(\eta_j a_m)\right]}{\partial a_m}\\ \ell_j H_v^{(1)}(\eta_j a_m) & 0 & \ell_j J_v(\eta_j a_m) & 0\\ \frac{\partial\left[H_v^{(1)}(\eta_j a_m)\right]}{\partial a_m} & \mp\frac{\xi_j k_{t,j} H_v^{(1)}(\eta_j a_m)}{a_m} & \frac{\partial\left[J_v(\eta_j a_m)\right]}{\partial a_m} & \mp\frac{\xi_j k_{t,j} J_v(\eta_j a_m)}{a_m}\\ 0 & \frac{\eta_j^2}{\mu_{t,j}}H_v^{(1)}(\eta_j a_m) & 0 & \frac{\eta_j^2}{\mu_{t,j}}J_v(\eta_j a_m)\end{bmatrix}$$

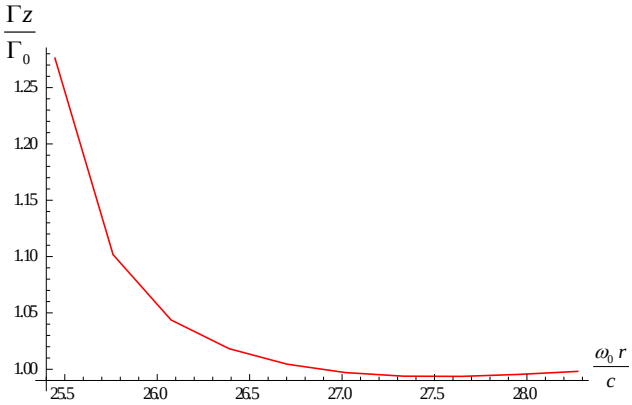
در اینجا $a_m\,(m=1,2,\ldots,N-1)$ شعاع لایه‌های مختلف را نشان می‌دهد. رابطه بالا در حالت حدی محیط مغناطو دی‌الکتریک همسانگرد به همان روابط مرجع [۸] میل می‌کند.

۴-آهنگ گسیل خودبه‌خودی یک اتم دوترازه

به منظور بررسی اثر سیاه‌چاله اپتیکی بر آهنگ گسیل خودبه‌خودی، مطابق شکل ۱ یک اتم دوترازه برانگیخته با بسامد گذار ω_A را در مکان $\mathbf{r}_A$ از مرکز پوشش قرار می‌دهیم. با فرض اینکه جهت گشتاور دو قطبی الکتریکی اتم در راستای محور Z است و با به‌کار رابطه (۸)، رابطه (۲) به شکل زیر ساده می‌شود

$$\frac{\Gamma z}{\Gamma_0}=1+\frac{6\pi}{\omega}\,\mathrm{Im}\left[\frac{2i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dh\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2-\delta_n^0\right)}{\eta_1^2}\left[c_{1v}^{11'}N^{(1)}_{\substack{e\\o}v\eta_1}(h)N'^{(1)}_{\substack{e\\o}v\eta_1}(-h)\right]\right]. \quad (۹)$$

در اینجا $\Gamma_0=\omega_A^3\mu^2/3\hbar\pi c^3\varepsilon_0$ آهنگ گسیل خودبه‌خودی اتم در خلاء است و از تعریف ضریب $c_{1v}^{11'}$ در رابطه بالا به دلیل کمبود فضا خودداری می‌کنیم. نحوه به‌دست آوردن این ضریب در مقاله‌ی [۸] تعریف شده است. با توجه به پیچیدگی رابطه (۹)، نتایج عددی آن در شکل ۲ برحسب فاصله رسم شده است.



شکل ۲: تغییرات مولفه Z ام آهنگ گسیل خودبخودی نسب به مقدارش در خلاء را برحسب پارامتر بدون بعد $\frac{\omega_0 r}{c}$ نشان می‌دهد. در این‌جا سیاه‌چاله اپتیکی با ۵ لایه‌ی استوانه‌ای هم‌مرکز الگوسازی شده است و $\lambda=0.25L$ و $\frac{\omega_0 L}{c}=8\pi$ در نظر گرفته شده‌اند.

۵- نتیجه‌گیری

از آنجا که تغییر در چگالی حالت‌های میدان تابشی موجب تغییر آهنگ گسیل خودبه‌خودی می‌شوند، بنابراین انتظار می‌رفت تا آهنگ گسیل خودبخودی نسبت به خلاء تغییر کند. در اینجا مشاهده می‌کنیم که برخلاف انتظارمان آهنگ گسیل خودبه‌خودی در نقاط نزدیک سیاه‌چاله تغییر چشمگیری با مقدار خلاء ندارد و در نواحی دور از سیاه‌چاله به‌درستی به مقدارش در خلاء میل می‌کند. ممکن است این تغییرات کم آهنگ گسیل خودبخودی مربوط به رژیم ضعیفی باشد که در این‌جا بکار برده‌ایم.

سپاسگزاری

نویسندگان از معاونت تحصیلات تکمیلی دانشگاه شهرکرد برای حمایت‌های انجام شده قدردانی می‌نمایند.

مراجع

[1] E. E. Narimanov and A. V. Kildishev, Appl. Phys. Lett 95, 041106 (2009).
[2] D. A. Genov, S. Zhang, and X. Zhang, Nature Phys 5, 687 (2009).
[3] W. Lu, J. Jin, Z. Lin, and H. Chen, J. Appl. Phys 108, 064517 (2010).
[۴] ا. عمو قربان، ع. مهدیفر، م. توکلی کچی، *اثر یک سیاه‌چاله اپتیکی بر آهنگ گسیل خودبه‌خودی یک اتم دوترازی*، مقاله نامه کنفرانس بهاره فیزیک ایران، ۱۴ (۱۳۹۴).
[۵] ا. عمو قربان، ع. مهدیفر، م. توکلی کچی، *درهم‌تنیدگی دو اتم دوترازی برانگیخته در حضور یک سیاه‌چاله اپتیکی*، مقاله نامه کنفرانس فیزیک ایران، (۱۳۹۴).
[6] H. Chen, R.-X. Miao, and M. Li, Opt. Express 18, 15183 (2010).
[7] H. T. Dung, L. Knöll, and D.-G. Welsch, Phys. Rev A 62, 053804 (2000).
[8] L.-W. Li, M.-S. Leong, T.-S. Yeo, and P.-S. Kooi, J. Electromag. Wave Applicat 14, 961 (2000).