دینامیک درهم‌تنیدگی در برهم‌کنش غیرخطی و دور از تشدید دو اتم دوترازی با یک میدان کوانتیده میرای فازی

روستایی، ندا[۱]؛ توسلی، محمد کاظم[۱و۲]

[۱] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

[۲] آزمایشگاه پردازش اطلاعات کوانتومی و رمزنگاری، دانشگاه یزد، یزد

چکیده:

در این مقاله برهم‌کنش غیرخطی دو اتم دوترازی با یک میدان کوانتیده میرای فازی در شرایط دور از تشدید را مورد ارزیابی می‌دهیم. برای یافتن پاسخ صریح این مدل، با یافتن هامیلتونی موثر، شکل صریح عملگر چگالی وابسته به زمان را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از این عناصر، از طریق محاسبه آنتروپی خطی کل سامانه و آنتروپی میدان، به بررسی تاثیر برهم‌کنش غیرخطی با تابع غیرخطی $f(n)=\sqrt{n}$ و نیز پارامتر میرایی فازی روی درهم‌تنیدگی سامانه می‌پردازیم.

کلید واژه: اتم دوترازی، آنتروپی خطی، عملگرچگالی، درهم‌تنیدگی، میرایی فازی.

Entanglement dynamics of the nonlinear interaction far from resonance of two two-level atoms with a quantized phase-damped field

Rustaee, Neda[1]; Tavassoly, Mohammad Kazem[1,2]

[1] Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

[2]The Laboratory of Quantum Information Processing, Yazd University, Yazd

E mail: mktavassoly@yazd.ac.ir

Abstract- In this paper we study the nonlinear interaction between two two-level atoms with a single-mode quantized phase-damped field far from resonance. To find the analytical solution of the considered model, we first deduce the effective Hamiltonian and evaluate the time-dependent elements of the density operator. Then, we study the influences of the non-linearity function $f(n)=\sqrt{n}$ and the phase-damping parameter on the degree of entanglement by using the total linear entropy of system and the entropy of field.

Keywords: Density operator, Entanglement, Linear entropy, Phase damping, Two-two atoms.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

یکی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه‌های کوانتومی درهم‌تنیدگی است که نقش به‌سزایی در محاسبات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ... دارد [۱]. در این مقاله به بررسی برهم‌کنش غیرخطی [۲و۳] و غیرتشدیدی دو اتم دوترازی با یک میدان تک‌مد در یک کاواک میرای فازی می‌پردازیم و درهم‌تنیدگی سامانه و اتم اول را از طریق محاسبه آنتروپی خطی مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

۲- هامیلتونی سامانه و رهیافت عملگر چگالی

هامیلتونی سامانه اتم‌ـمیدان بر اساس مدل تعمیم یافته JC با استفاده از تقریب‌های "موج چرخان " و "دوقطبی" به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_1}{2}\hat{\sigma}_z^1 + \frac{\omega_2}{2}\hat{\sigma}_z^2 + g\sum_{j=1}^{2}(\hat{A}\hat{\sigma}_+^j + \hat{A}^\dagger \hat{\sigma}_-^j), \quad (۱)$$

که در آن ω_1 و ω_2 بسامد گذارهای اتمی، ω_0 بسامد میدان کوانتیده، $j=(1,2), \sigma_\pm^j, \sigma_z^j$ عملگرهای پائولی اتمی، $\hat{a}$ ($\hat{a}^\dagger$) عملگرهای بوزونی آفرینش (نابودی) مدهای میدان، g ثابت جفت‌شدگی اتم‌ـمیدان، و $\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ عملگر تعداد، $\hat{A}^\dagger = f(\hat{n})\hat{a}^\dagger, \hat{A}=\hat{a}f(\hat{n})$ و $f(\hat{n})$ تابعی از $\hat{n}$ هستند. در واکوکی شدید که $\Delta=\omega-\omega_0 \ll 1$، می‌توان از تقریب پراکندگی استفاده نمود که در آن، بعد از انجام محاسباتی طولانی هامیلتونی سامانه به هامیلتونی موثر زیر تبدیل می‌شود، که برای به‌دست آوردن عملگر چگالی، به آن نیاز داریم [۴]و [۵]:

$$\begin{aligned}\hat{H}^{eff} &= \Omega_1[(a^+a+1)f^2(a^+a+1)|e\rangle_1\langle e| \\ &\quad - a^+af^2(a^+a)|g\rangle_1\langle g|] \\ &\quad + \Omega_2[(a^+a+1)f^2(a^+a+1)|e\rangle_2\langle e| \\ &\quad - a^+af^2(a^+a)|g\rangle_2\langle g|],\end{aligned} \quad (۲)$$

در اینجا $\Omega_1 = \frac{g^2}{\Delta_1}$، $\Omega_2 = \frac{g^2}{\Delta_2}$، $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_0$ و $\Delta_2 = \omega_2 - \omega_0$ قرار داده شده‌اند. در رهیافت عملگر چگالی، معادله اصلی سامانه مورد نظر با رابطه زیر توصیف می‌شود [۳]:

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}^{eff}, \hat{\rho}(t)] + \xi\hat{\rho}(t). \quad (۳)$$

که در آن $\hat{\rho}(t)$ عملگر چگالی است. جمله آخر در معادله بالا بیانگر میرایی فازی میدان کاواک است که با ابرعملگر ξ (که در آن λ ثابت میرایی است) توصیف می‌شود:

$$\xi = \lambda(2\hat{a}\bullet\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}\bullet - \bullet\hat{a}^+\hat{a}), \quad (۴)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} &= -i\,\Omega_1[(a^+a+1)f^2(a^+a+1)|e\rangle_1\langle e| \\ &\quad - a^+af^2(a^+a)|g\rangle_1\langle g|, \hat{\rho}(t)] - \\ &\quad i\,\Omega_2[(a^+a+1)f^2(a^+a+1)|e\rangle_2\langle e| \\ &\quad - a^+af^2(a^+a)|g\rangle_2\langle g|, \hat{\rho}(t)] \\ &\quad + \lambda[2\,a^+a\,\hat{\rho}(t)\,a^+a\, - \\ &\quad \hat{\rho}(t)\,a^+aa^+a - a^+aa^+a\hat{\rho}(t)],\end{aligned} \quad (۵)$$

دارای جوابی به صورت زیر است [۶]:

$$\hat{\rho}_{ij}(t) = e^{L_{ij}t}\hat{\rho}_{ij}(0) \qquad i,j=(e,g). \quad (۶)$$

در اینجا L_{ij} معادله لیوویل متناظر با معادله (۵) و g و e به‌ترتیب ترازهای اتمی پایه و برانگیخته هستند. هم‌چنین،

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{ij}(0) &= \hat{\rho}_A(0)\otimes\hat{\rho}_F(0) \\ &= |\psi_{AF}(0)\rangle\langle\psi_{AF}(0)|,\end{aligned} \quad (۷)$$

$$\begin{aligned}&|\psi_A(0)\rangle = C_{ee}|e,e\rangle + C_{gg}|g,g\rangle, \\ &|\psi_F(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}F_n|n\rangle, F_n = \exp(-|\alpha|^2/2) \\ &|\psi_{AF}(0)\rangle = |\psi_A(0)\rangle\otimes|\psi_F(0)\rangle\end{aligned} \quad (۸)$$

با گرفتن رد از معادله (۷) روی اتم دوم، عناصر ماتریس چگالی برای اتم اول در $(t=0)$ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{ee}(0) &= (|C_{ee}|^2 + |C_{eg}|^2)\sum_{m,n=0}^{\infty}F_mF_n^*|m\rangle\langle n|, \\ \hat{\rho}_{gg}(0) &= (|C_{gg}|^2 + |C_{ge}|^2)\sum_{m,n=0}^{\infty}F_mF_n^*|m\rangle\langle n|, \\ \hat{\rho}_{eg}(0) &= (C_{ee}C_{ge}^* + C_{eg}C_{gg}^*)\sum_{m,n=0}^{\infty}F_mF_n^*|m\rangle\langle n|, \\ \hat{\rho}_{ge}(0) &= (C_{ge}C_{ee}^* + C_{gg}C_{eg}^*)\sum_{m,n=0}^{\infty}F_mF_n^*|m\rangle\langle n|,\end{aligned} \quad (۹)$$

با استفاده از ابرعملگرهای $T = a\bullet\hat{a}^\dagger, P = \bullet\hat{a}^\dagger\hat{a}$ و $M = \hat{a}^\dagger\hat{a}\bullet$ و معادله (۵)، معادلات لیوویل متناظر با عناصر ماتریسی $\rho_{ge}, \rho_{eg}, \rho_{gg}, \rho_{ee}$ را به دست می‌آوریم (به جای نقطه در ابرعملگرها هر عملگر دلخواهی می‌تواند قرار بگیرد). عناصر L_{ij} در معادله (۶) برای اتم اول به شرح زیر به دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
L_{ee} &= -i\Omega_1[(M+1)f^2(M+1)- \\
&\quad (P+1)f^2(P+1)]-\lambda(M-P)^2, \\
L_{gg} &= i\Omega_1[Mf^2(M)-Pf^2(P)] \\
&\quad -\lambda(M-P)^2, \\
L_{eg} &= -i\Omega_1[(M+1)f^2(M+1)+ \\
&\quad Pf^2(P)]-\lambda(M-P)^2, \\
L_{ge} &= i\Omega_1[Mf^2(M)+(P+1)f^2(P+1)] \\
&\quad -\lambda(M-P)^2,
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

با قراردادن (۹) و (۱۰) در معادله (۶)، عناصر ماتریس چگالی وابسته به زمان به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}_{ee}(t) &= (|C_{ee}|^2+|C_{eg}|^2)\sum_{m,n=0}^{\infty} F_m F_n^* \\
&\quad \exp\{-i\Omega_1 t[(m+1)f^2(m+1) \\
&\quad -(n+1)f^2(n+1)]-\lambda t(m-n)^2\}|m\rangle\langle n|, \\
\hat{\rho}_{gg}(t) &= (|C_{gg}|^2+|C_{ge}|^2)\sum_{m,n=0}^{\infty} F_m F_n^* \\
&\quad \exp\{i\Omega_1 t[mf^2(m)-nf^2(n)] \\
&\quad -\lambda t(m-n)^2\}|m\rangle\langle n|, \\
\hat{\rho}_{eg}(t) &= (C_{ee}C_{ge}^*+C_{eg}C_{gg}^*)\sum_{m,n=0}^{\infty} F_m F_n^* \\
&\quad \exp\{-i\Omega_1 t[(m+1)f^2(m+1) \\
&\quad +nf^2(n)]-\lambda t(m-n)^2\}|m\rangle\langle n|, \\
\hat{\rho}_{ge}(t) &= (C_{ge}C_{ee}^*+C_{gg}C_{eg}^*)\sum_{m,n=0}^{\infty} F_m F_n^* \\
&\quad \exp\{i\Omega_1 t[mf^2(m)+(n+1)f^2(n+1)] \\
&\quad -\lambda t(m-n)^2\}|m\rangle\langle n|.
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

حال با معلوم شدن کامل ماتریس چگالی سامانه، می‌توان ویژگی‌های فیزیکی آن را بررسی کرد. در این مقاله به بررسی آنتروپی خطی کل سامانه و آنتروپی خطی اتم اول می‌پردازیم. عملگر چگالی کاهش یافته اتم و میدان به صورت زیر است:

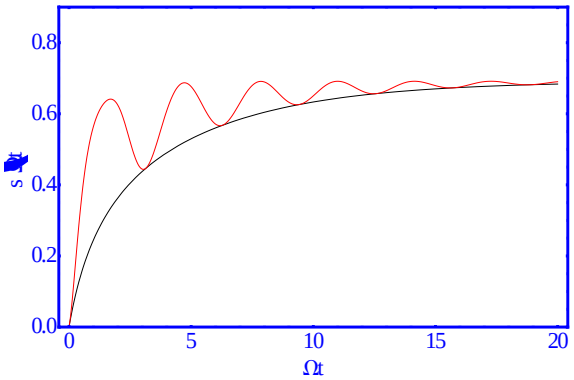
$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}_A(t) &= Tr_F[\hat{\rho}(t)], \\
\hat{\rho}_F(t) &= Tr_A[\hat{\rho}(t)] = \hat{\rho}_{ee}(t)+\hat{\rho}_{gg}(t).
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

آنتروپی کل سامانه‌ی اتم-میدان، آنتروپی اتم اول و آنتروپی میدان با رابطه‌های زیر توصیف می‌شوند:

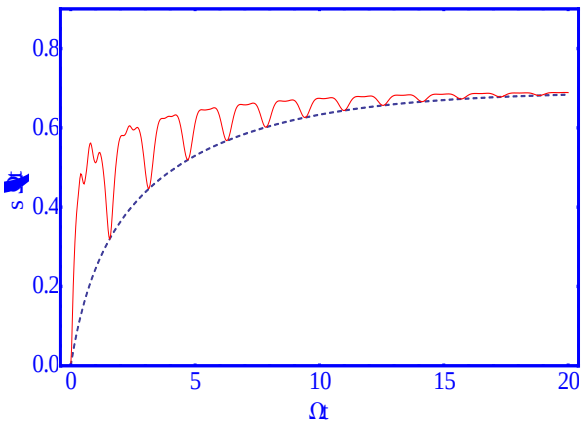
$$
\begin{aligned}
S(t) &= 1-Tr[\rho^2]= \\
&\quad 1-\sum_{m,n}^{\infty}|F_m F_n|^2 e^{-2\lambda t(m-n)2} \\
&\quad [(|C_{ee}|^2+|C_{eg}|^2)+(|C_{ge}|^2+|C_{gg}|^2) \\
&\quad +2(C_{ee}C_{ge}+C_{eg}C_{gg})^2],
\end{aligned}
\tag{۱۳}
$$

$$
\begin{aligned}
S_F(t) &= 1-Tr[\rho_F^2(t)]= \\
&\quad 1-\sum_{m,n}^{\infty}|F_m F_n|^2 e^{-2\lambda t(m-n)2} \\
&\quad \{1+4[(|C_{ee}|^2+|C_{eg}|^2)-(|C_{ee}|^2+|C_{eg}|^2)] \\
&\quad +\sin^2([(m+1)f^2(m+1)+mf^2(m)- \\
&\quad (n+1)f^2(n+1)-nf^2(n)]/2)\Omega_1 t\},
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

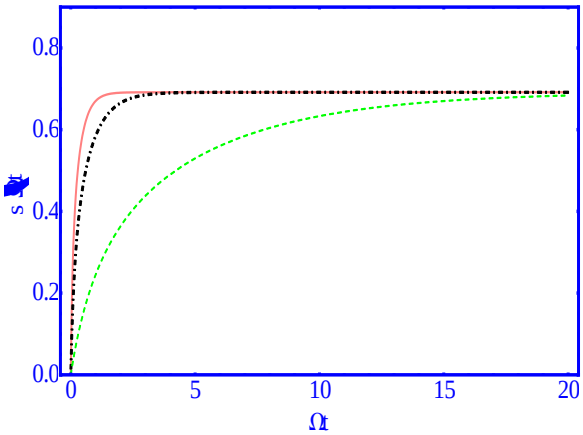
در حالی که آنتروپی کل سامانه به تابع غیرخطی $f(\hat{n})$ وابسته نیست، اما تحولات زمانی آنتروپی میدان تحت تاثیر شکل تابع $f(\hat{n})$ قرار می‌گیرد.



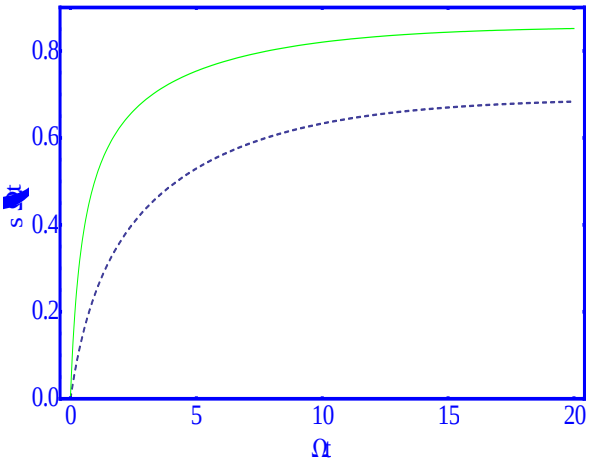
نمودار ۱: آنتروپی خطی کل سامانه (نقطه‌چین) و آنتروپی خطی میدان (توپر) بر حسب زمان مشخصه Ωt به ازای $c_{ee}=c_{eg}=c_{ge}=c_{gg}=1/2,\ \lambda/\Omega=0.1,\ \alpha=1,\ f=1$



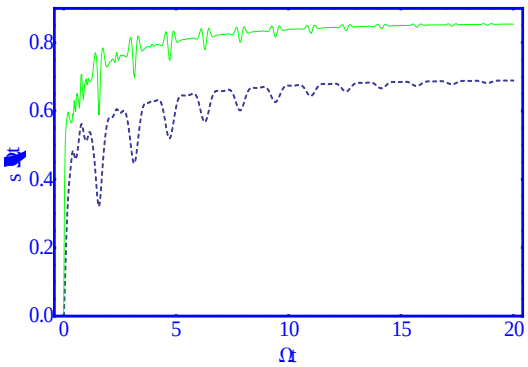
نمودار ۲: آنتروپی خطی کل سامانه (نقطه‌چین) و آنتروپی خطی میدان (توپر) بر حسب زمان مشخصه Ωt به ازای $f(n)=\sqrt{n}$,$\alpha=1$, $c_{ee}=c_{eg}=c_{ge}=c_{gg}=1/2, \lambda/\Omega=0.1$.



نمودار ۳: آنتروپی خطی کل سامانه (نقطه چین) به ازای $\lambda=0.1$ و (نقطه خطچین) به ازای $\lambda=0.7$ و (توپر) به ازای $\lambda=1.5$ بر حسب زمان مشخصه Ωt و $c_{ee}=c_{eg}=c_{ge}=c_{gg}=1/2$



نمودار ۴: آنتروپی خطی کل سامانه (نقطه‌چین) به ازای $\alpha=1$ و (توپر) به ازای $\alpha=2$ برحسب زمان مشخصه Ωt و $c_{ee}=c_{eg}=c_{ge}=c_{gg}=1/2$



نمودار۵: آنتروپی خطی میدان (نقطه‌چین) به ازای $\alpha=1$ و (توپر) به ازای $\alpha=2$ برحسب زمان مشخصه Ωt و $c_{ee}=c_{eg}=c_{ge}=c_{gg}=1/2$

۳- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله درهم‌تنیدگی یک سامانه معین را توسط آنتروپی خطی کل و آنتروپی خطی میدان مورد ارزیابی قرار دادیم. با مقایسه شکل‌های (۱) و (۲) به این نتیجه می‌رسیم که آنتروپی کل سامانه به تابع غیر خطی $f(n)$ وابسته نیست، اما آنتروپی میدان به شکل این تابع وابسته می‌باشد. علاوه بر این، این کمیت به ازای $f(n)=1$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد. هم‌چنین، با گذشت زمان در اثر میرایی فازی از شدت افت‌وخیزهای آن کاسته می‌شود و به یک مقدار ثابت می‌رسد. با مشاهده شکل (۳) که برای آنتروپی کل سامانه به ازای مقادیر مختلف میرایی رسم شده، ملاحظه می‌شود که آنتروپی با افزایش مقدار میرایی به سرعت به مقدار بیشینه خود می‌رسد و سپس ثابت می‌شود. هم‌چنین، به بررسی اثرات α بر آنتروپی نیز پرداختیم. در نمودارهای (۴) و (۵) مشاهده کردیم که با افزایش این پارامتر (که معیاری از شدت میدان است) مقدار آنتروپی کل سامانه و آنتروپی میدان به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش پیدا می‌کند.

مراجع:

[1] T.C. Ralph, *Phys. Rev. A* **61** (2000) 010303.

[2] H .R. Baghshahi, M .K. Tavassoly, The Eur.Phys. J.Plus 130 (2015) 1-13.

[3] A. Karimi, M .K. Tavassoly, Int..J..Theor.Phys. (2015) 1-14.

[4] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* (Wiley – V C H, Berline, 2001)

[5] J. G. Peixoto. and M. C. Names, Phys. Rev. A **59** (1999) 3918.

[6] Z. Qing-Chun and Z. Shi-Ning, Chin .Phys. Soc, **14** (2006) 1147.