بیست و دومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هشتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۶ تا ۸ بهمن ماه ۱۳۹۴، دانشگاه یزد

# حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی

اکبر جعفری، امید عباسی

**گروه فیزیک، دانشکده علوم دانشگاه ارومیه، ارومیه**

**حالت‌های همدوس چهار-فوتونی پیش از این مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این مقاله حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی به عنوان ویژه‌حالت‌های توان چهارم عملگر نابودی فوتونی تغییرشکل یافته ، معرفی و به بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها پرداخته‌ایم. در تحقق فیزیکی حالت‌های منتجه با در نظر گرفتن توابع تغییر شکل مربوط به محیط غیرخطی کر و سیستم یون به دام افتاده، مشخص شد که چنین حالت‌هایی برخلاف حالت‌های خطی متناظر در گستره وسیعی از دامنه میدان، از آمار فوتونی زیرپوواسونی به عنوان یک ویژگی غیرکلاسیکی برخوردار هستند. علاوه بر این، مطالعه چلاندگی مراتب بالاتر و چلاندگی مربع دامنه نشان داد که دامنه بروز چلاندگی (دامنه بروز ویژگی غیرکلاسیکی) برای این حالت‌ها نسبت به حالت‌های خطی بیشتر است. در نهایت نتیجه گرفته شد که منفی شدن تابع توزیع ویگنر حالت‌های غیرخطی معرفی شده، در گستره وسیعی از فضای فاز، حاکی از غیرکلاسیکی بودن ذاتی حالت‌های مذکور است.**

کلید واژه: حالت‌های همدوس غیرخطی ، حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی، ویژگی‌های غیرکلاسیکی

# Four-photon nonlinear coherent states

Akbar Jafari, Omid Abbasi

Department of Physics, Urmia University, Urmia

The four-photon coherent states have been already studied. In this article the four-photon nonlinear coherent states are presented as the eigenstates of the fourth power of deformed photon annihilation operator and their non-classical properties are investigated. In the physical realization of the resulted states by considering the deformation function related to the Kerr nonlinear medium and the trapped ion system, it was found that unlike the corresponding linear states, such states indicate sub-Poissonian photon statistics as a non-classical property in the wide range of the field amplitude. Moreover the study of the higher-order squeezing as well as amplitude-squared squeezing shows that the domain of the squeezing (domain of the non-classical feature) for such states is greater than that for linear states. Finally it is concluded that the negativity of Wigner distribution function of the presented nonlinear states, in the extensive region of the phase space, implicate the non-classicality nature of such states.

Keywords: Nonlinear coherent states, Four-photon nonlinear coherent states, non-classical properties



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت **www.opsi.ir** قابل دسترسی باشد.

مقدمه

بعد از توسعه‌ی نظریه‌ی کوانتومی تابش و با کشف لیزر، حالت-های همدوس به عنوان حالت‌هایی که به توصیف کلاسیکی میدان الکترومغناطیسی بسیار نزدیک‌اند به صورت گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفتند. این حالت‌ها یکی از مهم‌ترین مفاهیم در اپتیک کوانتومی به‌شمار می‌روند که در شاخه‌های مختلف فیزیک مدرن کاربردهای گوناگونی دارند. یکی از انواع تعمیم-های داده شده به این نوع حالت‌ها مبتنی بر مفاهیم جبری، حالت‌های همدوس غیرخطی است. این حالت‌ها با تعریف عملگر و همیوغ مختلط متناظر با آن به ترتیب به صورت $\hat{A} = \hat{a} f(\hat{n})$ و $\hat{A}^{\dagger} = f^{\dagger}(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}$ بنا می‌شوند که $f(\hat{n})$ تابعی از شدت میدان می‌باشد. از طرف دیگر حالت-های همدوس استاندارد چندفوتونی به عنوان ویژه حالت‌های توان‌های بالاتر عملگر نابودی فوتونی پیش از این معرفی شده اند .به عنوان یه مورد خاص، حالت‌های همدوس چهار-فوتونی بعنوان ویژه حالت‌های توان چهارم عملگر نابودی فوتونی استاندارد تعریف شده و ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها از جمله آمار فوتونی، چلاندگی‌های مراتب مختلف و تابع توزیع ویگنر، مورد بررسی قرار گرفته است[۱]. در این مقاله حالت‌های همدوس غیر خطی چهار-فوتونی بصورت ویژه حالت‌های توان چهارم عملگر نابودی فوتونی تعمیم‌یافته و بصورت زیر تعریف می‌شوند[۲]:

$$\hat{A}^4 \left|\xi^{(l)}, f\right\rangle = \xi \left|\xi^{(l)}, f\right\rangle \qquad (۱)$$

که در این رابطه $\xi$ در حالت کلی یک عدد مختلط و $l$ کمترین تعداد فوتون در این حالت‌ها است. اکنون با در نظر گرفتن بسط حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی در فضای کت‌های عددی و جایگذاری در رابطه (۱) شکل کلی این حالت‌ها بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\left|\xi^{(l)}, f\right\rangle = N_l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{(4n+l)!\, f(4n+l)!}} \left|4n+l\right\rangle \qquad (۲)$$

که در این رابطه $l = 0,1,2,3$ و $N_l$ ضریب بهنجارش است که از رابطه $\left\langle \xi^{(l)}, f \middle| \xi^{(l)}, f \right\rangle = 1$ بدست می‌آید. به منظور بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی این حالت‌ها در این مقاله از توابع غیرخطی $f(n) = \sqrt{1-\chi(1-n)}$ ( $\chi$ پارامتر مربوط به جمله غیرهارمونیک ناشی از محیط شبه کر ) توصیف‌کننده یک محیط غیرخطی کر-گونه و $f(n) = L_n^1(\eta^2)/(n+1)L_n^0(\eta^2)$ (که $L_n^m(x)$ چندجمله-ای‌های لاگر تعمیم‌یافته و $\eta$ پارامتر لمب-دیک است) مربوط به حالت‌های همدوس غیرخطی سیستم یون به دام‌افتاده ، استفاده می‌کنیم.

آمار فوتونی

به‌منظور بررسی آمار فوتونی میدان از تابع همبستگی مرتبه دوم که بصورت زیر تعریف می‌شود، استفاده می‌کنیم:

$$g^2(0) = \frac{\left\langle \hat{n}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{n} \right\rangle}{\left\langle \hat{n} \right\rangle^2} \qquad (۳)$$

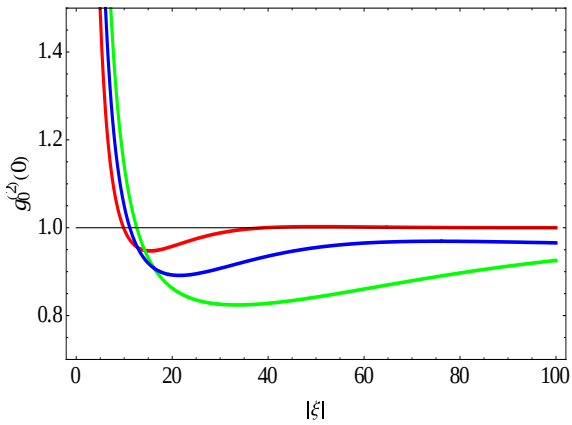
که مقادیر چشمداشتی در رابطه (۳) بین حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی در رابطه (۲) گرفته شده و به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\left\langle \hat{n}^m \right\rangle = \left|N_l\right|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left|Q_{n,l}\right|^2 (4n+l)^m \qquad (۴)$$

که در رابطه فوق داریم:

$$Q_{n,l} = \frac{\xi^n}{\sqrt{(4n+l)!\, f(4n+l)!}} \qquad (۵)$$

لازم به ذکر است که به ازای $g^2(0) > 1$ ، $g^2(0) = 1$ و $g^2(0) < 1$ میدان تحت بررسی به‌ترتیب دارای آمار فراپوواسونی، پوواسونی و زیرپوواسونی (ویژگی غیرکلاسیکی) خواهد بود. در شکل ۱ تابع همبستگی مرتبه دوم حالت‌های همدوس چهار-فوتونی برحسب $|\xi|$ و به ازای $l = 0$ رسم شده است. منحنی قرمز مربوط به $f(n) = 1$ (حالت‌های همدوس استاندارد چهار-فوتونی) و منحنی‌های سبز و آبی به‌ترتیب مربوط به حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی با توابع وابسته به شدت مربوط به محیط کر و سیستم یون به دام افتاده است. پارامترهای در نظر گرفته‌شده $\chi = 0.2$ و $\eta = 0.2$ است. کاملا مشخص است که حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی بر خلاف حالت‌های استاندارد در گستره وسیعی از دامنه $|\xi|$ دارای آمار زیرپوواسونی هستند که این نشان‌دهنده وجود ویژگی غیرکلاسیکی این حالت‌ها است. مقدار $g^2(0) = 1$ در گستره وسیعی از $|\xi|$ برای حالت‌های خطی نشان‌دهنده تشابه رفتار این حالت‌ها به حالت‌های همدوس استاندارد است. لازم به ذکر است که در بررسی تابع همبستگی مرتبه دوم برای سایر مقادیر $l$ مشخص شد که سایر حالت‌های غیرخطی نیز در گستره وسیعی از دامنه میدان، برخلاف حالت-های استاندارد، دارای آمار زیرپوواسونی هستند.




شکل۱: تابع $g^2(0)$ برحسب $|\xi|$، برای $f(n)=1$ (منحنی قرمز)، تابع غیرخطی محیط کر(منحنی سبز) و تابع غیرخطی سیستم یون به دام افتاده (منحنی آبی). $l=0$، $\chi=0.2$ و $\eta=0.2$

چلاندگی

به‌منظور بررسی چلاندگی مراتب مختلف میدان بعنوان یک ویژگی غیرکلاسیکی مهم، عملگرهای هرمیتی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\hat{X}_k=\frac{\hat{a}^k+\hat{a}^{\dagger k}}{2},\hat{Y}_k=\frac{\hat{a}^k-\hat{a}^{\dagger k}}{2i} \quad (۶)$$

با در نظر گرفتن کوادراتورهای میدان با جایگذاری $k=1$ در رابطه (۶)، به منظور محاسبه چلاندگی مرتبه $N$ ام ( $N$ زوج) از پارامتر چلاندگی $q_l^{(N)}$ که بصورت زیر تعریف می‌شود، استفاده می‌کنیم:

$$q_l^{(N)}=\frac{\left\langle(\Delta\hat{x}_i)^N\right\rangle-(N-1)!!(1/4)^{N/2}}{(N-1)!!(1/4)^{N/2}} \quad (۷)$$

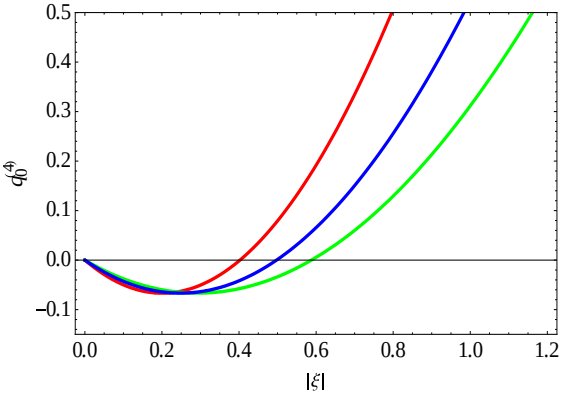
که در آن $\hat{Y}_1$ یا $\hat{X}_1$ ($\hat{x}_i$). در این‌صورت شرط وجود چلاندگی مرتبه $N$ ام بصورت زیر است:

$$-1\le q_l^{(N)}<0 \quad (۸)$$

با توجه به مقادیر چشمداشتی‌های وارد شده در عبارت مربوط به پارامتر چلاندگی به ازای $N=2$، مشخص شد همانگونه که انتظار داشتیم حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی همانند حالت‌های استاندارد متناظر، چلاندگی مرتبه دوم (چلاندگی نرمال میدان) را از خود نشان نمی‌دهند. به منظور بررسی چلاندگی مراتب بالاتر، با قرار دادن $N=4$ در رابطه (۷) به محاسبه چلاندگی مرتبه ۴ام برای حالت‌های تحت بررسی می‌پردازیم. جهت محاسبه مقادیر چشمداشتی مورد نیاز در $q_0^{(4)}$ عبارت زیر مورد نیاز است:

$$\left\langle\hat{a}^m\right\rangle=|N_l|^2\sum_{n=0}^{\infty}Q_{n,l}^*Q_{n+m/4,l}\sqrt{\frac{(4n+l+m)!}{(4n+l)!}} \quad (۹)$$

که در این عبارت $m=4,8,...$ و $Q_{a,b}$ از رابطه (۵) بدست می‌آید. در شکل ۲ منحنی $q_0^{(4)}$ برحسب دامنه $|\xi|$ رسم شده است. تمام ثابت‌ها و پارامترهای این شکل همانند شکل ۱ است و به منظور دستیابی به بیشترین مقدار چلاندگی $\xi=|\xi|e^{i\varphi}$ و $\varphi=\pi$ در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل کاملا مشخص است که دامنه بروز چلاندگی مرتبه چهارم (دامنه بروز ویژگی غیرکلاسیکی) در حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی نسبت به حالت‌های استاندارد بیشتر شده است. در بررسی‌های به عمل آمده مشخص شد که امکان بروز چلاندگی فقط برای حالت $l=0$ امکان‌پذیر است. ضمنا با محاسبه چلاندگی‌های مراتب بالاتر مشخص شد که با افزایش مرتبه چلاندگی شاهد افزایش دامنه و عمق چلاندگی برای حالت‌های غیرخطی خواهیم بود.



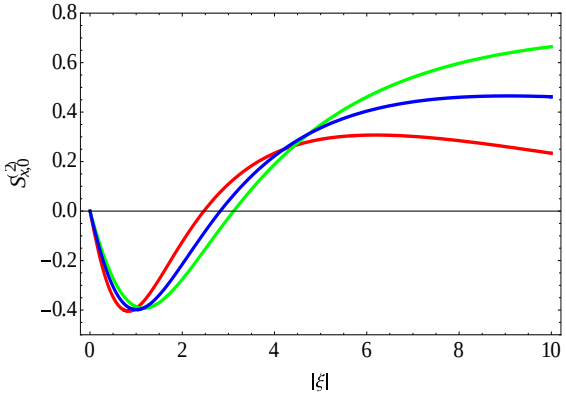

شکل۲: تابع $q_0^{(4)}$ برحسب $|\xi|$. ثابت‌ها و پارامترها همانند شکل ۱

محاسبه چلاندگی مربع دامنه نیز به عنوان یکی دیگر از ویژگی‌های غیرکلاسیکی مهم همواره مورد توجه بوده است. با جایگذاری $k=2$ در رابطه (۶) که منجر به تعریف کوادراتورهای حقیقی و موهومی مربع دامنه میدان می‌شود و از طرفی در نظر گرفتن روابط جابجایی موجود، شرط بروز چلاندگی مربع دامنه بصورت $-1\le S_{x,l}^{(2)}<0$ (یا $-1\le S_{y,l}^{(2)}<0$) خواهد بود که پارامترهای چلاندگی مربع دامنه بصورت زیر خواهند بود:

$$S_{x,l}^{(2)}=\frac{2\left\langle\hat{n}^2\right\rangle-2\left\langle\hat{n}\right\rangle+\left\langle\hat{a}^4\right\rangle+\left\langle\hat{a}^{\dagger4}\right\rangle-(\left\langle\hat{a}^2\right\rangle+\left\langle\hat{a}^{\dagger2}\right\rangle)^2}{4\left\langle\hat{n}\right\rangle+2} \quad (۱۰)$$

$$S_{y,l}^{(2)}=\frac{2\left\langle\hat{n}^2\right\rangle-2\left\langle\hat{n}\right\rangle-\left\langle\hat{a}^4\right\rangle-\left\langle\hat{a}^{\dagger4}\right\rangle+(\left\langle\hat{a}^2\right\rangle-\left\langle\hat{a}^{\dagger2}\right\rangle)^2}{4\left\langle\hat{n}\right\rangle+2}$$

درشکل ۳ منحنی $S_{x,0}^{(2)}$ برحسب $|\xi|$ در حالی رسم شده است که مقادیر ثابت و سایر پارامترها همانند شکل ۱ انتخاب شده است. با توجه به شکل مشخص است که در این حالت نیز دامنه چلاندگی مربع دامنه برای حالت‌های غیرخطی نسبت به حالت‌های استاندارد بیشتر شده است.



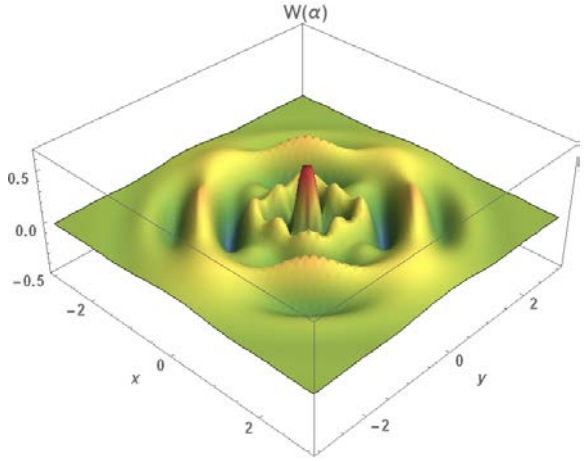

شکل۳: تابع $S_{x,0}^{(2)}$ برحسب $|\xi|$. ثابت‌ها و پارامترها همانند شکل ۱

تابع توزیع ویگنر

علاوه بر کاربردهای مختلف تابع توزیع ویگنر در اپتیک کوانتومی، می‌توان به نقش این تابع در تمیز دادن حالت‌های کلاسیکی از غیرکلاسیکی اشاره کرد به صورتی‌که منفی شدن این تابع توزیع که برای بعضی از حالت‌های کوانتومی رخ می‌دهد نشان دهنده معیاری از غیرکلاسیکی بودن حالت تحت بررسی است. در این مقاله از تعریف زیر به‌منظور محاسبه تابع توزیع ویگنر استفاده می‌کنیم:

$$W(\alpha)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\langle\alpha,n|\hat{\rho}|\alpha,n\rangle \quad (۱۱)$$

که در آن $|\alpha,n\rangle$ حالت‌های عددی جابجاشده [۳] و $\hat{\rho}=|\xi^{(l)},f\rangle\langle\xi^{(l)},f|$ عملگرچگالی حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی است. در شکل ۴ منحنی تابع توزیع ویگنر این حالت‌ها برحسب قسمتهای حقیقی و موهومی $\alpha$ برای تابع غیرخطی محیط کر و در حالت $l=0$ رسم شده است. منفی بودن تابع توزیع ویگنر در قسمت‌های زیادی از فضای فاز که به وضوح در شکل مشخص است، نشان‌دهنده غیرکلاسیکی بودن حالت‌های غیرخطی است. لازم به ذکر است رسم این تابع برای سایر مقادیر $l$ نشان داد که این ویژگی غیرکلاسیکی مشخصه ذاتی تمام رده‌های حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی است.




شکل ۴: تابع توزیع ویگنر برحسب $x=\mathrm{Re}(\alpha)$ و $y=\mathrm{Im}(\alpha)$. $l=0$، $\chi=0.1$ و $\xi=50$

نتایج

در این مقاله به معرفی حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-فوتونی بعنوان ویژه‌حالت‌های توان چهارم عملگر نابودی فوتونی تعمیم‌یافته، پرداختیم. مشخص شد که برخلاف حالت‌های خطی متناظر، این حالت‌ها در گستره وسیعی از دامنه، دارای آمار زیرپواسوونی هستند. علاوه بر منفی بودن تابع توزیع ویگنر که به نوعی ویژگی ذاتی این حالت‌ها محسوب می‌شود، معلوم شد که دامنه بروز چلاندگی مراتب بالاتر و همچنین چلاندگی مربع دامنه، نسبت به حالت‌های خطی بزرگتر است. لازم به ذکر است که مشخص شده است چنین حالت‌هایی از طریق برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیرخطی چهار-گانه با اختلاف فاز $\pi/2$ و در یک سیستم برهم‌کنشی مبتنی بر مدل جینز-کامینگز تغییر شکل‌یافته، قابل تولید هستند[۲].

مراجع

[1] E. E. Hach III, C. C. Gerry, "Four-photon coherent states properties and generation", J. Mod. Opt. Vol.39, No.12, pp.2501, 1992.

[2] O. Abbasi, A. Jafari, "Four-photon nonlinear coherent states" submitted for publication.

[3] R. Roman-Ancheyta, C. Gonzalez Gutierrez, J. Recamier " photon-added nonlinear coherent states for a one-mode field in a Kerr medium", J. Opt. Soc. Am. B, Vol.31, No.1, pp.38, 2014.