بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

معادلات مسیر یک الکترون آزاد و معادله بهره لیزر الکترون آزاد با ویگلر لیزری و میدان مغناطیسی راهنما

روح اله هدایتی، ساعد جعفری و سعید باطبی

گروه فیزیک، دانشگاه گیلان، رشت

چکیده- در این مقاله معادلات مسیر الکترون نسبیتی و بهره یک لیزر الکترون آزاد با ویگلر لیزری قطبیده خطی در حضور یک میدان مغناطیسی راهنمای یکنواخت بررسی می شود که در آن پرتو لیزر خلاف جهت پرتو الکترونی انتشار می یابد. خروجی این سیستم، که دارای طول موج های بسیار کوتاه تک رنگ و قابل تنظیم است، منبع پالس های *x-ray* می باشد. روش یافتن معادله بهره لیزر الکترون آزاد با ویگلر لیزری شرح داده شده و حل های عددی معادله بهره سیستم برای مسیرهای گروه *I* و *II* ارائه گردیده و مورد بحث قرار گرفت.

کلید واژه- لیزر الکترون آزاد، ویگلر لیزری، میدان مغناطیسی راهنما، بهره

Free-Electron Trajectory Equations and Gain Function in a Free-Electron Laser Based on a Laser-Undulator with Axial Guide Magnetic Field

Roohollah Hedayati, Saed Jafari and Saeed Batebi,

Department of Physics, University of Guilan, Rasht

Abstract- In this article, trajectory equations of a relativistic electron and gain function of a free-electron laser in the presence of a counter propagating linearly polarized laser undulator embedded in an uniform guide magnetic field have been presented. Such a scheme produce very short wavelength and can be considered as a source of x-ray pulses which is easily tunable and highly monochromatic. A detailed analysis of gain function of laser-pumped FEl has been presented and numerical solutions of gain of the system, for group I and II orbits have been demonstrated and discussed.

Keywords: Free electron laser, Laser pumped undulator, Uniform magnetic field, Gain

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-03]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

لیزر الکترون آزاد (FEL[۱]) وسیله ای است که با استفاده از پرتو الکترون نسبیتی گذرنده از یک میدان مغناطیسی دوره ای، که ویگلر نامیده می شود، به تولید تابش الکترومغناطیسی با توان بالا می پردازد [۱]. مطالعات بسیاری انجام شده تا همزمان با پایین آوردن انرژی پرتو الکترون نسبیتی ، به طول موج های خروجی کوتاه تر و توان های بالاتر دست یابیم. در این راستا، لیزرهای الکترون آزاد با ویگلر لیزری پیشنهاد گردید [۲-۳].

تفاوت اصلی میان ویگلرهای مرسوم مغناطیسی ویگلر لیزری در فرکانس خروجی تابش آنهاست. در یک ویگلر مغناطیسی، طول موج تابش خروجی به صورت $\lambda_r \approx \lambda_w / 2\gamma_0^2$ می باشد که در آن λ_w طول موج ویگلر بوده و γ_0 عامل نسبیتی لورنتس است. اما طول موج تابش خروجی برای یک ویگلر لیزری به صورت $\lambda_r \approx \lambda_l / 4\gamma_0^2$ می باشد که در آن λ_l طول موج ویگلر لیزری است. در نتیجه با گسترش ویگلرهای لیزری، طول موج ویگلر از مرتبه سانتیمتر در ویگلرهای مغناطیسی به مرتبه میکرومتر می رسد و میزان انرژی مورد نیاز برای تولید منابع X-ray از چندین GeV به چند MeV می رسد [۴].

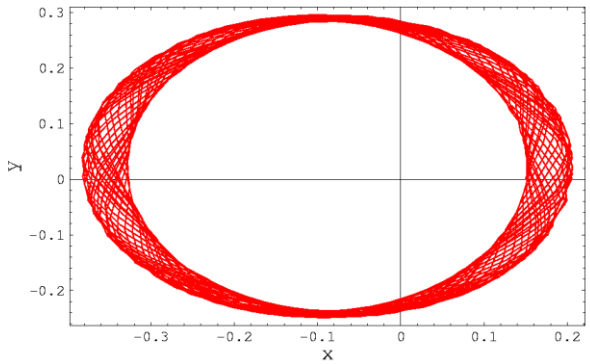
در این مقاله ما به بررسی معادلات مسیر حرکت الکترون و معادله بهره یک لیزر الکترون آزاد با ویگلر لیزری می پردازیم که در آن یک پالس لیزر پر شدت از یک پرتو الکترونی نسبیتی که در خلاف جهت حرکت می کند پراش می یابد. به علاوه یک میدان مغناطیسی راهنما، در خلاف جهت پالس لیزری وجود دارد که از پراکندگی عرضی الکترون ها جلوگیری کرده و نیز بهره سیستم را بالا می برد. در بخش دوم این مقاله، مسیرهای حرکت پرتو الکترونی به صورت تحلیلی بیان شده و شبیه سازی گردیده است. برهم کنش الکترون با میدان های تابشی و معادله بهره سیستم در بخش سوم به صورت تحلیلی بیان شده است. در آخر، در بخش چهارم، نتایج شبیه سازی شده و مورد بحث واقع شده است.

۲- معادلات مسیر الکترون نسبیتی

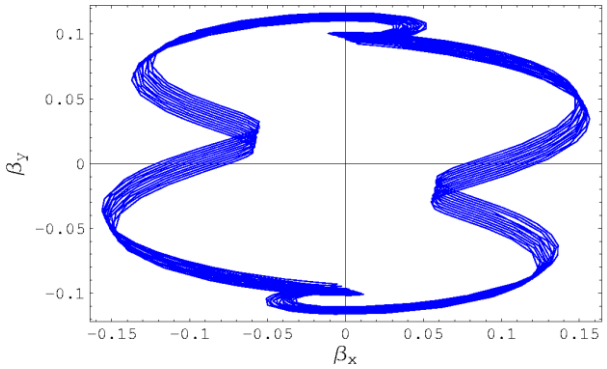
شکل نسبیتی نیروی لورنتس برای سیستمی شامل یک پالس پرشدت لیزری، که در حضور یک میدان مغناطیسی خلاف جهت، با پرتو الکترونی نسبتی برهم کنش می کند به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d(\gamma m v)}{dt} = -e[-\frac{\omega_L}{ck_L} B_L \cos(k_L z + \omega_L t)\hat{e}_x + \frac{1}{c} v \times (B_0 \hat{e}_z + B_L \cos(k_L z + \omega_L t)\hat{e}_y)] \quad (۱)$$

که در آن (k_L, ω_L) عدد موج و فرکانس ویگلر لیزری، B_0 قله میدان مغناطیسی، و m و $-e$ و v به ترتیب جرم سکون، بار الکتریکی و سرعت الکترون می باشند. این معادله را به سادگی می توان به سه معادله در راستای محورهای مختصات تبدیل کرد. در ابتدا ما از روش رانگ کوتای مرتبه چهارم بهره گرفته و مسیرهای الکترون و مولفه های سرعت آن را شبیه سازی کردیم. برش عرضی از حرکت یک تک الکترون و نیز مولفه های عرضی سرعت آن در شکل های زیر نشان داده شده اند:



شکل ۱: نمودار مقطع عرضی مسیر حرکت تک ذره در ویگلر لیزری برای $\gamma = 8$، $\Omega_L = 0.05$ و $\Omega_0 = 0.42$.



شکل ۲: نمودار برش عرضی سرعت های بهنجار (β_y, β_x) برای $\gamma = 8$، $\Omega_L = 0.05$ و $\Omega_0 = 0.38$.

[۱] Free electron laser

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-03]

با حل تحلیلی مسئله در حالت پایا، $\gamma = const$، مولفه های عرضی سرعت الکترون به شکل زیر بدست آمدند:

$$\beta_x = \frac{\Omega_L(\beta_3+\beta_p)^2}{(\beta_3+\beta_p)^2-\Omega_0^2}\sin(\chi_3+\beta_p\tau) \qquad (۲)$$

$$\beta_y = -\frac{\Omega_0\Omega_L(\beta_3+\beta_p)}{(\beta_3+\beta_p)^2-\Omega_0^2}\cos(\chi_3+\beta_p\tau) \qquad (۳)$$

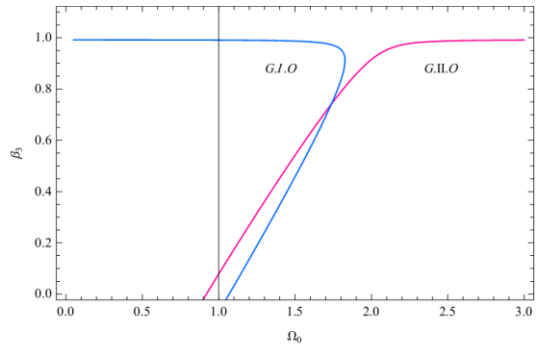
که در آن $\Omega_0 = eB_0/\gamma mc^2k_l$ فرکانس سیکلوترونی بهنجار، $\tau = ck_L$ زمان بهنجار، $\chi_3 = k_l z$ طول بهنجار، $\Omega_L = eB_L/\gamma mc^2k_l$ و $\beta_p = \frac{\omega_l}{ck_l}$ می باشند. معادلات سرعت بدست آمده در دو کلاس مسیر متفاوت دسته بندی می شوند که ما آن ها را به عنوان مدارهای گروه I برای $\Omega_0^2 < (\beta_3+\beta_p)^2$ و مدارهای گروه II برای $\Omega_0^2 > (\beta_3+\beta_p)^2$ در نظر می گیریم [۵]. اکنون با استفاده از رابطه $\gamma^{-2} = 1-\beta_x^2-\beta_y^2-\beta_z^2$، می توان مولفه سوم سرعت بهنجار را به دست آورد:

$$\beta_3^2 = 1-\gamma^{-2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\Omega_L(\beta_z+\beta_p)^2}{(\beta_z+\beta_p)^2-\Omega_0^2}\right]^2 \times\left(1+\frac{\Omega_0^2}{(\beta_z+\beta_p)^2}\right) \qquad (۴)$$

سپس با داشتن مولفه های سرعت الکترون و با استفاده از رابطه ماکسول $\nabla\times B = \frac{4\pi}{c}J+\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$ معادله گروه را بدست می آوردیم:

$$\beta_p^2 - \frac{\omega_b^2(\beta_z+\beta_p)^2}{(\beta_z+\beta_p)^2-\Omega_0^2} - 1 = 0 \qquad (۵)$$

با حل همزمان معادلات (۴) و (۵)، می توان سرعت محوری بهنجار را به صورت تابعی از فرکانس بهنجار میدان مغناطیسی راهنما بدست آورد که حل عددی آن در شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می گردد دو مسیر گروه I و II در شکل ظاهر می شود. مدار گروه I زمانی اتفاق می افتد که $\Omega_0 < 1.83$ و مدار گروه II برای $\Omega_0 > 1.83$ رخ می دهد.



شکل ۳: نمودار سرعت محوری بهنجار به صورت تابعی از فرکانس بهنجار میدان مغناطیسی راهنمای محوری برای مدارهای گروه های I و II. پارامترهای انتخاب شده عبارتند از $\gamma = 8$، $\Omega_L = 0.05$ و $\omega_b = 0.1$.

۳- برهم کنش لیزر با میدان های تابشی و معادله بهره سیستم

زمانی که پرتو الکترونی از میان ویگلر لیزری می گذرد جفت شدگی میان موج الکترومغناطیسی با مدهای پرتو الکتروستاتیکی منجر به تولید تابش الکترومغناطیسی فرکانس بالا می شود [۶]. برهم کنش میان الکترون و میدان تابشی منجر به انتقال انرژی میان آنها می شود. انرژی منتقل شده، $\dot{\gamma}$ ، به صورت زیر بدست آمد:

$$\dot{\gamma} = -\frac{eE_r}{2mc}\left[\frac{\Omega_L(\beta_3+\beta_p)}{(\beta_3+\beta_p)-\Omega_0}\right]\sin(\Omega t+\phi) + \frac{\Omega_L(\beta_3+\beta_p)}{(\beta_3+\beta_p)+\Omega_0}\sin(\Omega' t+\phi)] \qquad (۶)$$

که در آن $\Omega = \omega_L\beta_{II}+ck_l\beta_p+\omega_r(\beta_{II}-1)$ و $\Omega' = \omega_L\beta_{II}+ck_l\beta_p-\omega_r(\beta_{II}-1)$ می باشند. ما با استفاده از روشی که در مرجع [۷] بیان شده مقدار خالص انرژی منتقل شده میان پرتوهای الکترونی و موج اپتیکی در مرتبه دوم را به صورت زیر بدست آوردیم:

$$\langle\nabla\gamma\rangle_\phi = -\frac{eE_r}{4mc}\frac{\Omega_L(\beta_3+\beta_p)(\omega_L+\omega_r)DT^3\Omega}{(\beta_3+\beta_p)-\Omega_0} \times g(\Omega T) \qquad (۷)$$

که در آن رابطه

$$g(\Omega T) = \frac{2-2\cos(\Omega T)-\Omega T\sin(\Omega T)}{\Omega^3T^3} \qquad (۸)$$

را تابع بهره گویند. تابع بهره یک تابع پادمتقارن است افزایش نسبی انرژی موج نور در هر بار عبور از ویگلر را نشان می دهد [۸]. همان طور که رابطه (۷) نشان می

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-03]

دهد زمانی که $g(\Omega T)>0$ است انرژی از موج اپتیکی به پرتو الکترونی انتقال می یابد و بالعکس.

با در نظر گرفتن شرایط نزدیک به تشدید، معادله بهره سیستم به شکل زیر بدست می آید:

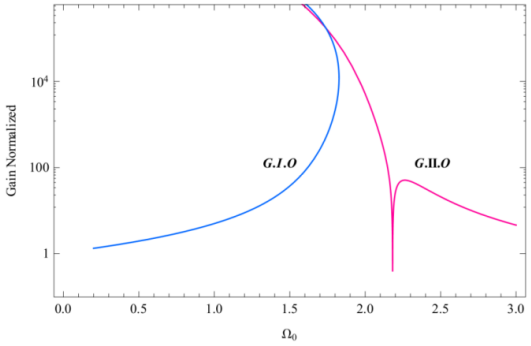
$$G=\frac{4\pi n_b L^3\beta_{II}}{E_r(c\beta_{II})^3}\times \left[\frac{1}{4c}\frac{\Omega_L(\beta_3+\beta_p)(\omega_L+\omega_r)D\Omega}{(\beta_3+\beta_p)-\Omega_0}g(\Omega T)\right] \quad (۹)$$

که در آن n_b چگالی پرتو الکترونی، L طول مسیر برهم کنش و β_{II} مولفه سوم سرعت می باشند.

در این رابطه $T=L/v_{II}$ مدت زمان برهم کنش را نشان می دهد.

۴- بررسی عددی بهره و نتیجه گیری

بهره بدست آمده تابع پارامترهای مختلفی است که مهمترین آنها وابستگی بهره به میدان مغناطیسی راهنماست. اگر بهره سیستم را در حالتی که میدان مغناطیسی راهنما صفر است G_0 بنامیم، در این صورت رابطه $\Delta=|G/G_0|$ میزان وابستگی بهره به میدان راهنما را به خوبی نشان می دهد. برای رسم $\Delta=|G/G_0|$، مقادیری که برای β_3 و β_p بر حسب مقدار Ω_0 در بخش قبل بدست آمد را در رابطه $|G/G_0|$ قرار می دهیم. آنگاه نمودار لگاریتمی آن را رسم می کنیم.



شکل ۵: نمودار بهره بهنجار بر حسب فرکانس بهنجار میدان مغناطیسی محوری برای $\gamma=8$، $\Omega_L=0.05$ و $\omega_b=0.1$.

همانطور که در نمودار ملاحظه می گردد برای مدارهای گروه I، رابطه Δ مربوط به بهره نسبی سیستم، به صورت یکنواخت افزایش می یابد و بزرگتر می شود. برای گروه مدارهای گروه II، رابطه Δ ابتدا از یک مقدار ماکزیمم به سمت مقادیر کمتر سوق می یابد و به صفر می رسد و سپس افزایش می یابد و به یک مقدار ماکزیمم می رسد و در ادامه دوباره کاهش می یابد و با افزایش Ω_0 به صفر می رسد. بدین ترتیب رفتار بهره سیستم نسبت به میدان مغناطیسی راهنما به شکل مناسبی بررسی گردید.

مراجع

[۱] Schmuser P., Dhlus M., Rossbach J., *Ultraviolet and Soft X-ray Free-Electron Lasers*, Springer ۲۰۰۸.

[۲] Sprangle P., Hafizi B., Penano J. R., *Laser-pumped coherent x-ray free electron laser*, Phys, Rev, ST-Accel. Beams ۱۲, ۰۵۰۷۰۲ (۲۰۰۹).

[۳] Zhang T., Feng C., Deng H., Wang D., Dai Z., Zhao Z., *Compensating the electron beam energy spread by the nautral transverse gradient of laser undulator in all-optical x-ray light sources*, Optics Express, ۲۲, ۱۳۸۸۰ (۲۰۱٤).

[٤] Altarelli M., *The European X-ray free-electron laser facility in Humburg*, Nucl. Instrum. Methods. Phys. Res. B, ۲٦۹, ۲۸٤٥ (۲۰۱۱)

[٥] Freund H. P., Antonsen T. M., *Principle of Free Electron Lasers*, Springer (۱۹۹۲)

[٦] Jafari S., Jafarinia F., Mehdian H., *Free-electron laser with a plasma wave wiggler propagating through a magnetized plasma channel* , Laser Phys. ۲۳, ۰۸٥۰۰٥ (۲۰۱۳).

[۷] Esmaeilzade M., Mehdian H., Willett J. E., *Gain equation for a free-electron laser with a helical wiggler and ion-channel guiding*, Phys. Rev. E., ٦٥ ۰۱٦٥۰۱ (۲۰۰۱).

[۸] Shiozawa T., *Classical Relativistic Electrodynamics, Theory of Light Emission and Application to Free Electron Lasers*, Springer ۲۰۰٤.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-03]