دینامیک درهم‌تنیدگی دو اتم دوترازی درحال برهم‌کنش با دو کاواک در حضور اتلاف

علیرضا نورمندی‌پور [۱]؛ محمد کاظم توسلی[۱،۲]

[۱] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
[۲] گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده – در این مقاله، یک سامانه شامل دو کاواک اتلافی که در هرکدام یک اتم دوترازی قرار دارد را معرفی می‌کنیم. ارتباط بین این دو کاواک از طریق جمله‌ی برهم‌کنشی میدان-میدان وارد مسئله می‌شود. با توجه به حضور اتلاف، از هامیلتونی گاردینر-کولت استفاده می‌کنیم. با حل معادله‌ی وابسته به زمان شرودینگر، تابع حالت سامانه را به‌دست خواهیم آورد. در نهایت، به‌منظور بررسی درجه‌ی درهم‌تنیدگی بین دو اتم، معیار تلاقی را برای حالت‌های مختلف اولیه‌ی اتمی به‌کار خواهیم برد. نتایج نشان می‌دهند که برای دو حالت اولیه‌ی اتمی و برای مقادیر غیر صفر نرخ واپاشی کاواک‌ها، افت درهم‌تنیدگی به‌وضوح دیده می‌شود. درحالی‌که درغیاب اتلاف، رفتار نوسانی درهم‌تنیدگی حول مقدار پایایی از درهم‌تنیدگی مشاهده می‌شود. پدیده‌ی مرگ درهم‌تنیدگی برای حالت اولیه‌ی جداپذیر و برای مقادیر غیرصفر نرخ واپاشی کاواک‌ها مشاهده می‌شود.

کلید واژه- سامانه‌های اتلافی، مدل جینز-کامینگز، هامیلتونی گاردینر-کولت، درهم‌تنیدگی کوانتومی.

Dynamics of entanglement of two atoms interacting with two cavities in the presence of dissipation

A. Nourmandipour[1]; M. K. Tavassoly[1],[2]

[1] Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd
[2] Photonic & Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

In this paper, we first introduce a system consists of two dissipative cavities in which there exists a two-level atom in each cavity. These two cavities are linked via a field-field interaction term. Due to the presence of dissipation in the cavities we are lead to use the Gardiner-Collett Hamiltonian for the considered model. In the continuation, the exact analytical solution of the wave function for the system has been obtained. Finally, we use the concurrence as a measure for the investigation of the degree of entanglement between atoms for different initial states of the atomic system. The results show that for two initial atomic states and for non-zero values of cavities decay rate, the downfall of entanglement is clearly seen. Whereas, in the absence of dissipation, an oscillatory behavior of entanglement around a stationary value of entanglement is seen. However, the entanglement sudden death is seen for a separable atomic initial state and for non-zero values of cavities decay rate.

Keywords: Dissipative systems, Jaynes-Cummings's model, Gardiner-Collett Hamiltonian, Quantum entanglement.

۱. مقدمه

درهم‌تنیدگی کوانتومی یکی از مهم‌ترین پدیده‌های مطرح در مکانیک کوانتومی است[۱]. مهم‌ترین و در عین حال ساده‌ترین روش‌های تولید حالت‌های درهم‌تنیده، بهره‌گیری از فرآیند برهم‌کنش اتم-میدان داخل یک کاواک است [۲]. در حالت کلی، سامانه‌های واقعی به طور اجتناب‌ناپذیری با محیط اطراف خودشان برهم‌کنش دارند. برای توصیف این نوع از سامانه‌ها، می‌توان آنها را به‌صورت یک سامانه بزرگتر که از خودش و محیط اطراف تشکیل شده است در نظر گرفت. این سامانه‌ی بزرگتر بسته است و بنابراین می‌توان هامیلتونی مکانیک کوانتومی را به آن اعمال کرد. در این مقاله، دو کاواک اتلافی که در هر کدام یک اتم دوترازی وجود دارد را درنظر می‌گیریم. ارتباط بین دو کاواک از طریق جمله‌ی برهم‌کنشی میدان-میدان کاواک‌ها وارد مسئله می‌شود. بعد از نوشتن هامیلتونی مناسب با استفاده از دو تبدیل کانونیک متوالی و تکنیک فانو، هامیلتونی سیستم را ساده می‌کنیم. سپس با حل معادله‌ی شرودینگر متناظر و به‌دست آوردن تابع موج سامانه، ویژگی‌های درهم‌تنیدگی بین دو اتم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور پارامتر تلاقی را به عنوان معیاری برای توصیف درهم‌تنیدگی مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲. مدل

هامیلتونی برهم‌کنش یک کاواک با میدان خارجی توسط مدل گاردینر-کولت بیان می‌شود [۳]. در این مدل، محیط اطراف را می‌توان به عنوان یک مجموعه از عملگرهای پیوسته‌ی نوسانگرهای هماهنگ در نظر گرفت. بنابراین هامیلتونی مناسب برای سامانه معرفی شده برابر است

با:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\omega_{qb}\hat{\sigma}_z^i + \sum_{i=1}^{2}\omega_i\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i \\ &+\sum_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\eta d\eta \hat{B}_i^\dagger(\eta)\hat{B}_i(\eta) \\ &+\sum_{i=1}^{2} g\,(\hat{a}_i^\dagger\hat{\sigma}_-^i + \hat{a}_i\hat{\sigma}_+^i) \\ &+\sum_{i=1}^{2} G\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta(\hat{a}_i^\dagger\hat{B}_i(\eta)+\hat{a}_i\hat{B}_i^\dagger(\eta)) \\ &+g_{12}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right).\end{aligned} \qquad (۱)$$

در این روابط $\hat{B}_i(\eta)$ عملگر نابودی محیط پیوسته‌ی خارجی کاواک iام با بسامد η است. هم‌چنین ω_{qb} بسامد گذار اتمی است که برای دو اتم یکسان فرض شده‌است، ω_i بسامدهای میدان در کاواک‌ها، g جفت‌شدگی بین اتم‌ها و میدان کاواک‌ها، g_{12} جفت‌شدگی بین دو میدان کاواک‌ها و G جفت‌شدگی بین میدان و محیط است که برابر $G=\sqrt{\kappa/\pi}$ فرض می‌شود (κ نرخ واپاشی است). لازم به‌ذکر است که استفاده از این مدل برای توصیف اتلاف، محاسبات را تا حد زیادی ساده‌تر می‌کند. از طرفی این مدل منجر به یک چگالی طیفی لورنتسی می‌شود که بیانگر بازتاب‌پذیری غیر ایده‌آل در آینه‌های کاواک است. در ابتدا برای از بین بردن جمله‌ی مربوط به برهم‌کنش میدان-میدان (جمله‌ی آخر از (۱)) دو تبدیل کانونی زیر را اعمال می‌کنیم [۴]:

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{b}_1\\ \hat{b}_2\end{pmatrix}, \qquad (۲)$$

$$\begin{pmatrix}\hat{B}_1(\eta)\\ \hat{B}_2(\eta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{C}_1(\eta)\\ \hat{C}_2(\eta)\end{pmatrix}. \qquad (۳)$$

با انتخاب مناسب زاویه‌ی چرخش بصورت زیر

$$\theta=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2g_{12}}{\Omega_2-\Omega_1}\right), \qquad (۴)$$

هامیلتونی سامانه را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_A+\hat{H}_{F-S}+\hat{H}_{A-F}, \\ \hat{H}_A &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\omega_{qb}\hat{\sigma}_z^i, \\ \hat{H}_{F-S} &= \sum_{i=1}^{2}\Omega_i\hat{b}_i^\dagger\hat{b}_i+\sum_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\eta d\eta\hat{C}_i^\dagger(\eta)\hat{C}_i(\eta) \\ &+\sum_{i=1}^{2}G\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta(\hat{b}_i^\dagger\hat{C}_i(\eta)+\hat{b}_i\hat{C}_i^\dagger(\eta)), \\ \hat{H}_{A-F} &= g\cos\theta\sum_{i=1}^{2}(\hat{b}_i^\dagger\hat{\sigma}_-^i+\hat{b}_i\hat{\sigma}_+^i) \\ &+g\sin\theta\left(\hat{b}_2\hat{\sigma}_+^1-\hat{b}_1\hat{\sigma}_+^2+H.C.\right),\end{aligned} \qquad (۵)$$

که در آن

$$\Omega_1=\omega_1\cos^2\theta+\omega_2\sin^2\theta-g_{12}\sin2\theta, \qquad (۶)$$

$$\Omega_2=\omega_1\sin^2\theta+\omega_2\cos^2\theta+g_{12}\sin2\theta. \qquad (۷)$$

در ادامه به‌منظور ساده‌تر کردن هامیلتونی $\hat{H}_{F-S}$، عملگرهای پوشاننده $\hat{A}_i(\omega)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم [۵]:

$$\hat{A}_i(\omega)=\alpha_i(\omega)\hat{b}_i+\int_{-\infty}^{+\infty}\beta_i(\eta,\omega)\hat{C}_i(\eta)d\eta, \qquad (۸)$$

که در آن $\alpha_i(\omega)$ و $\beta_i(\omega,\eta)$ را طوری به‌دست می‌آوریم که هامیلتونی $\hat{H}_{F-S}$ به‌صورت زیر قطری شود:

$$\hat{H}_{F-S}=\sum_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega d\omega\hat{A}_i^\dagger(\omega)\hat{A}_i(\omega). \qquad (۹)$$

از طرفی این عملگرها باید در روابط جابه‌جایی زیر صدق کنند:

$$\left[\hat{A}_i(\omega),\hat{H}_{F-S}\right]=\omega\hat{A}_i(\omega),$$
$$\left[\hat{A}_i(\omega),\hat{A}_j^{\dagger}(\omega')\right]=\delta_{ij}\delta\left(\omega-\omega'\right). \quad (۱۰)$$

با استفاده از این شرایط می‌توان $\alpha_i(\omega)$ و $\beta_i(\omega,\eta)$ را به‌دست آورد. در واقع با حل معادله‌ی (۱۰) $\alpha_i(\omega)$ به‌صورت یک تابع لورنتسی به‌دست خواهد آمد. از طرفی عملگرهای $\hat{b}_i$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از عملگرهای $\hat{A}_i(\omega)$ به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{b}_i=\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_i^*(\omega)\hat{A}_i(\omega)d\omega. \quad (۱۱)$$

در نهایت، با در نظر گرفتن روابط (۱۱)، (۹) و (۵)، هامیلتونی سامانه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\omega_{qb}\hat{\sigma}_z^i+\sum_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega d\omega\hat{A}_i^{\dagger}(\omega)\hat{A}_i(\omega)$$
$$+g\cos\theta\sum_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha_i^*(\omega)\hat{A}_i(\omega)\hat{\sigma}_+^i+H.C.)d\omega \quad (12)$$
$$+g\sin\theta\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha_2^*(\omega)\hat{A}_2(\omega)\hat{\sigma}_+^1-\alpha_1^*(\omega)\hat{A}_1(\omega)\hat{\sigma}_+^2+H.C.\right)d\omega.$$

۳. تحول زمانی حالت درهم‌تنیده‌ی سامانه

حال فرض می‌کنیم حالت اولیه‌ی سامانه به‌صورت زیر باشد:

$$|\psi_0\rangle=\left(\cos\vartheta|e,g\rangle+\sin\vartheta e^{i\phi}|g,e\rangle\right)|0\rangle_{R_1}|0\rangle_{R_2}, \quad (۱۳)$$

که در آن $|0\rangle_{R_i}$ حالت خلاء چندمدی برای کاواک iام است. حالت سامانه در زمان t را نیز به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\psi(t)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_\omega(t)|1_\omega\rangle_1|0\rangle_{R_2}|g,g\rangle d\omega$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\beta_\omega(t)|0\rangle_{R_1}|1_\omega\rangle_2|g,g\rangle d\omega$$
$$+\Gamma(t)|e,g\rangle|0\rangle_{R_1}|0\rangle_{R_2}$$
$$+\xi(t)|g,e\rangle|0\rangle_{R_1}|0\rangle_{R_2}. \quad (۱۴)$$

با تعریف دو تابع $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به‌صورت

$$x_1(t)=\cos\theta\,\Gamma(t)-\sin\theta\xi(t), \quad (۱۵)$$

$$x_2(t)=\cos\theta\xi(t)+\sin\theta\,\Gamma(t), \quad (۱۶)$$

و با استفاده از هامیلتونی (۱۲) و تابع موج (۱۴) و حل معادله‌ی وابسته به زمان شرودینگر، معادلات دیفرانسیل جفت‌شده‌ی زیر برای ضرایب بسط به‌دست می‌آیند:

$$\dot{\alpha}_\omega(t)=-i\left(\omega-\omega_{qb}\right)\alpha_\omega(t)-ig\alpha_1(\omega)x_1(t), \quad (۱۷)$$

$$\dot{\beta}_\omega(t)=-i\left(\omega-\omega_{qb}\right)\beta_\omega(t)-ig\alpha_2(\omega)x_2(t), \quad (۱۸)$$

$$\dot{x}_1(t)=-ig\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_1^*(\omega)\alpha_\omega(t)d\omega, \quad (۱۹)$$

$$\dot{x}_2(t)=-ig\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_2^*(\omega)\beta_\omega(t)d\omega. \quad (۲۰)$$

با انتگرال‌گیری از معادلات (۱۷) و (۱۸) و قرار دادن $\alpha_\omega(t)$ و $\beta_\omega(t)$ به ترتیب در (۱۹) و (۲۰) خواهیم داشت:

$$\dot{x}_i(t)=-g^2\int_0^t x_i(t')e^{(t-t')\left[-k+i\left(\omega_{qb}-\Omega_i\right)\right]}dt'. \quad (۲۱)$$

معادله‌ی به‌دست آمده را می‌توان با استفاده از تبدیلات لاپلاس به‌صورت زیر حل کرد:

$$x_i(t)=x_{0i}\frac{g}{n_i}e^{a_i t/2}\cos\left(n_i t-\phi_i\right), \quad (۲۲)$$

که در این روابط قراردادهای زیر اختیار شده است:

$$\Delta_i=\Omega_i-\omega_{qb},\quad a_i=-k-i\Delta_i,$$
$$n_i^2=g^2-\frac{a_i^2}{4},\quad \tan\phi_i=-\frac{a_i}{2n_i}, \quad (۲۳)$$

و هم‌چنین با استفاده از (۱۳) ، (۱۵) و (۱۶) داریم:

$$x_{01}=\cos\theta\cos\vartheta-e^{i\phi}\sin\theta\sin\vartheta,$$
$$x_{02}=\cos\theta\sin\vartheta+e^{i\phi}\sin\theta\cos\vartheta. \quad (۲۴)$$

با داشتن شکل صریح توابع $x_1(t)$ و $x_2(t)$ و با استفاده از (۱۷) و (۱۸) می‌توان $\alpha_\omega(t)$ و $\beta_\omega(t)$ را به‌صورت تحلیلی به‌دست آورد. به‌دلیل حجم بالای محاسبات، شکل صریح این توابع در مقاله نیامده است.

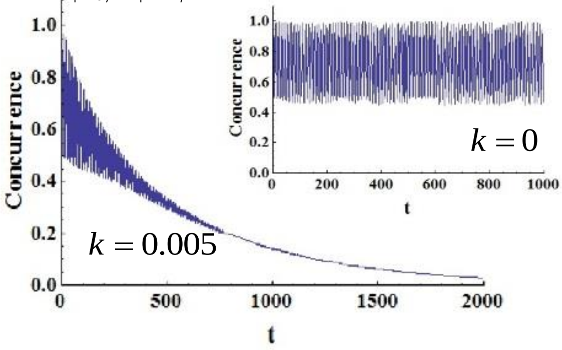
۴. دینامیک درهم‌تنیدگی

تلاقی یک معیار مناسب برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی سامانه‌های دو ذره‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$C(t)=\max\left\{0,\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_3}-\sqrt{\lambda_4}\right\}, \qquad (۲۵)$$

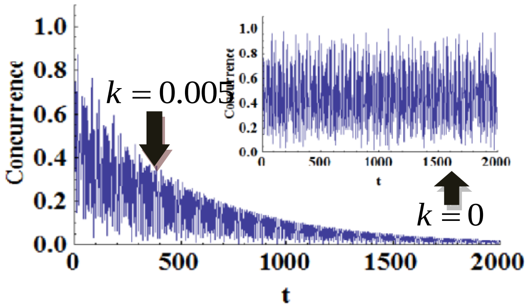
که در آن λ_i ویژه‌مقادیر (به ترتیب نزولی) ماتریس هرمیتی $\hat{R}=\hat{\rho}\hat{\rho}_s$ هستند به‌طوری‌که $\hat{\rho}$ ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی اتمی و $\hat{\rho}_s=\hat{\sigma}_y\otimes\hat{\sigma}_y\hat{\rho}^*\hat{\sigma}_y\otimes\hat{\sigma}_y$ که در آن $\hat{\sigma}_y$ یک ماتریس پاولی است. مقادیر تلاقی بین صفر (وقتی دو اتم جداپذیر باشند) و یک (وقتی دو اتم در حداکثر درهم‌تنیدگی هستند) تغییر می‌کند. شکل ۱ تحول زمانی تلاقی را برای تابع موج اولیه‌ی $|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e,g\rangle+|g,e\rangle\right)$ به ازای دو مقدار $k=0.005$ و $k=0$ نشان می‌دهد. در این نمودارها مقادیر $g=0.3,\ g_{12}=0.5, \omega_{qb}=2, \omega_2-\omega_1=0.1$ لحاظ شده است. همان‌طور که از شکل ۱ مشاهده می‌شود، برای مقادیر متناهی نرخ واپاشی کاواک، k، مقدار تلاقی از حداکثر مقدار خودش در زمان $t=0$ (یک) شروع شده و همان‌طور که زمان افزایش می‌یابد، مقدار تلاقی نیز به سمت صفر میل می‌کند که نشان می‌دهد که در زمان‌های نسبتا طولانی، درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها به‌دلیل وجود اتلاف از بین رفته است. برای حالت $k=0$ تلاقی به‌صورت سینوسی حول مقدار 0.75 نوسان می‌کند که بیانگر یک حالت پایا از درهم‌تنیدگی بین دو اتم است. در این حالت، پدیده‌ی مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی مشاهده نمی‌شود.

تحول زمانی تلاقی برای حالت اولیه‌ی $|\psi_0\rangle=|e,g\rangle$ در



شکل ۱- تغییرات زمانی تلاقی برای $|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e,g\rangle+|g,e\rangle\right)$.

شکل ۲ رسم شده است که در آن پارامترهای مختلف مسئله، همانند پارامترهای شکل ۱ انتخاب شده‌اند. در این مورد، برای مقادیر غیرصفر k باز هم رفتار نمایی تلاقی به وضوح دیده می‌شود که ناشی از اثر اتلاف است. برای مقدار $k=0$ (عدم وجود اتلاف)، تلاقی یک رفتار سینوسی پایدار حول 0.45 نسبت به زمان دارد. پدیده‌ی



شکل ۲- تغییرات زمانی تلاقی برای $|\psi_0\rangle=|e,g\rangle$.

مرگ درهم‌تنیدگی در حضور و در غیاب اتلاف به‌وضوح دیده می‌شود.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک سامانه شامل دو کاواک اتلافی که در داخل هر کدام یک اتم دوترازی وجود دارد را معرفی کرده‌ایم. با استفاده از روش گاردینر-کولت هامیلتونی مربوط به سامانه را نوشته و سپس با حل معادله‌ی شرودینگر تابع موج سامانه را به‌دست آوردیم. در ادامه به‌منظور بررسی درجه‌ی درهم‌تنیدگی بین دو اتم، معیار تلاقی را به‌کار بردیم. نتایج برای دو حالت اولیه‌ی اتمی متفاوت رسم شده‌اند. در هر دو حالت، برای مقادیر غیر صفر k، افت درهم‌تنیدگی نسبت به زمان به‌وضوح مشاهده می‌شود. برای $k=0$، افت درهم‌تنیدگی از بین رفته و یک حالت پایا از درهم‌تنیدگی دیده می‌شود. پدیده‌ی مرگ درهم‌تنیدگی برای حالت اولیه‌ی جداپذیر، $|\psi_0\rangle=|e,g\rangle$، در حضور و در غیاب اتلاف به وضوح دیده می‌شود.

مراجع

[1] C. H. Bennett, and S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2881.

[2] S-B Zheng, Phys. Rev. A **77** (2008) 044303.

[3] M.J. Collett, C.W. Gardiner, Phys. Rev. A **30** (1984) 1386.

[4] M.J. Faghihi, M.K. Tavassoly, J. Phys. B: A. Mol. Opt. Phys. **45** (2012) 035502; K. Svozil, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 3341.

[5] U. Fano, Phys. Rev. **124** (1961) 1866.

[6] K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 2248.