بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

بررسی مدهای تابش در یک مخزن متقارن درحالت ترازمند و امکان چگالش فوتون‌ها در گستره بزرگتر از میکروکاواک اپتیکی

فاطمه صائب، محمد اعتصامی

یزد، دانشگاه یزد، دانشکده فیزیک

چکیده – ما یک مخزن فوتونی دارای ویژگی‌ها و شرایط مرزی مناسب برای نظم‌یافتن فوتون‌ها معرفی کرده و در تقریب خطی، معادله هلمهولتز را برای پتانسیل برداری آن در دستگاه کروی حل می‌کنیم. وابستگی‌های قطبی و شعاعی روابط بدست آمده برای ویژه مدها احتمال چگالیدگی آنها را نوید می‌دهند. اضافه بر این، صفرهای متوالی مولفه‌های شعاعی و قطبی چگالی شار انرژی باعث محصور شدن فوتون‌ها در بسته‌های فوتونی منظم می‌شود. در هر بسته فوتونی شرایطی برای فوتون‌ها قابل مقایسه با شرایط آنها در یک میکروکاواک اپتیکی قابل فراهم شدن است به‌گونه‌ای که رابطه پاشندگی نانسبیتی شده و فوتون‌ها می‌توانند با حفظ تعداد به ترازمندی گرمایی برسند.

کلید واژه- معادله هلمهولتز برداری، چگالی شار انرژی، مدهای پایا و ترازمند، چگالش فوتون‌ها، میکروکاواک اپتیکی

An Investigation of the Modes of Radiation in a Symmetric Container in Equilibrium and the Possibility of Photon Condensation in an Extent Larger than Optical Microcavity

Fatemeh Saeb, Mohammad Eatesami

Physics Department, Yazd University, Yazd, Iran

Abstract- We introduce a photon container with suitable characteristics and boundary conditions for photon ordering and in the linear approximation solve the Helmholtz equation for vector potential in spherical coordinates. The polar and radial dependences of the obtained relations for the eigenmodes advise a likelihood condensation. In addition the successive zeros of the radial component and polar component of the energy current density lead to photon confining in a configuration of photon bundles. For the photons in every bundle conditions comparable with their condition in an optical microcavity are providable so that their dispersion relation becomes non-relativistic and the photons may attain number conserving thermal equilibrium.

Keywords: Vectorial Helmholtz Equation, Energy Current Density, Stationary and Equilibrium Modes, Photon Condensation, Optical Microcavity

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-02]

۱- مقدمه

لازمه وقوع BEC در یک دستگاه فوتونی به تعادل گرمایی درآوردن فوتون‌ها با حفظ تعداد می‌باشد. بر اساس رابطه اساسی دینامیک نسبیتی $E=\sqrt{E_0^2+(pc)^2}$ که هم‌ارزی جرم- انرژی را دربردارد، می‌توان با محصور کردن فوتون‌ها رابطه پاشندگی آن‌ها را نانسبیتی کرده و جرم سکونی را به فوتون‌ها نسبت داد. چیو و بویس[۱] امکان وقوع BEC برای فوتون‌ها در داخل کاواک ناخطی فابری- پرو پرشده با اتم‌هایی در حالت‌های پایه را مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند. در یک سلسله پژوهش‌های ممتد چنگ[۲-۳] ، به بررسی چگالش تابش گرمایی در جسم سیاه ناخطی کر پرداخته و پیش‌بینی کرده که فوتون‌های گرمایی به واسطه مبادله فونون‌های ناقطبی اپتیکی، در زیر دمای معینی به یک حالت چلانیده همدوس گذار می‌کنند. مهمترین کارهای تجربی در مورد چگالش فوتون‌ها را به‌تازگی ویتز و همکاران [۴-۵] به ثبت رسانیده‌اند. آنها توانستند وقوع BEC برای فوتون‌ها در دمای اتاق در میکروکاواک اپتیکی حاوی محلول رنگینه و کوک‌شده با یک پرتو لیزری را مشاهده و مورد تجزیه و تحلیل قرار دهند. در کار آنها، آینه‌های کاواک پتانسیل محصور کننده و جرم موثرمخالف صفری را برای فوتون‌ها ایجاد می‌کند.

چگالش فوتون‌ها در گستره وسیع و در شرایط طبیعی نقطه عطف مهمتری است که برای دست‌یابی به آن چالش‌های موجود و چگونگی فائق آمدن بر آنها را باید مورد بحث و بررسی قرار داد. ما در اینجا نشان می‌دهیم که در مخزن فوتونی که قبلاً پیشنهاد کرده‌ایم[۶]، شرایط برای ایجاد خودبخودی آرایه‌های نظم یافته فوتونی فراهم است. تلاش ما بررسی امکان وقوع چگالش فوتونی در گستره‌ای بزرگتر از میکروکاواک اپتیکی و بدون استفاده از پرتو لیزر است.

۲- معرفی مخزن فوتونی و فرمول‌بندی

توجه به امکان چگالش فوتون‌ها در گستره بزرگ، بیشتر از طریق توجه به منشاء چگالش در چگالش‌های موجود بدست می‌آید. ما در یک رهیافت میکروسکوپی مبتنی بر توابع همبستگی، به خوبی نشان داده‌ایم که عوامل اصلی چگالش‌های گوناگون یعنی همبستگی‌های بوزونی و وابستگی‌های جفت‌شدگی قابل ترکیب و هماهنگی‌سازی می‌باشند به طوری که دستیابی به چگالش‌های بدیع حتی در دمای اتاق امکان‌پذیر است[۷]. در این جا با ارائه یک رهیافت پدیده‌شناسانه ساده‌شده برای یک مخزن فوتونی با تقارن‌ها و شرایط مرزی ویژه سعی می‌کنیم پیش‌بینی‌های قبلی خود را دنبال نمائیم. دستگاه پیشنهادی ما برای بررسی چگالش فوتون‌ها، شامل دو قسمت به شکل مخروط دوار با زاویه راس θ_0 مرتبط با هم می‌باشد که دو انتهای آنها با سطوح کروی به شعاع a بسته شده و تمامی سطوح داخلی آن بازتاب کننده کامل‌اند[۶]. در یک تحلیل پدیده‌شناسانه می‌توان استدلال کرد که برای دستگاه فوتونی پارامتر نظم برداری $\mathbf{A}$ وجود دارد که از معادله زیر پیروی می‌کند:

$$\alpha\mathbf{A}+\beta\left(\mathbf{A}.\mathbf{A}^{*}\right)\mathbf{A}+\gamma\left(i\nabla+\mathbf{A}/\Phi_0\right)^2\mathbf{A}=0 \qquad (۱)$$

در تقریب خطی این معادله به معادله معروف هلمهولتز

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\mathbf{A}=0 \quad , \quad k\equiv|\mathbf{k}|=\omega/c \qquad (۲)$$

تبدیل می‌شود. جواب معادله (۲) از طریق قضیه‌ای[۸] به جواب معادله اسکالر هلمهولتز $(\nabla^2+k^2)\Psi(r,\theta,\varphi)=0$ مرتبط می‌شود که طبق آن $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ به صورت زیر دوجواب مستقل معادله (۲) خواهند بود:

$$\mathbf{A}_1=\nabla\times\left(\hat{\mathbf{r}}r\Psi\right) \quad \mathbf{A}_2=\nabla\times\nabla\times\left(\hat{\mathbf{r}}r\Psi\right)/k \qquad (۳)$$

سهم این دو بخش در پتانسیل برداری از یکدیگر مستقل‌اند، لذا کمیت های مستخرج از آنها هم دو سهم مجزا خواهند داشت. در واقع دو دسته مد پایا و ترازمند (مدهای ۱و۲) خواهیم داشت و می‌توان آنها را جداگانه مورد بحث و بررسی قرارداد. جواب معادله هلمهولتز اسکالر را می‌شناسیم:

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=\sum_{qm}\psi_{qm}=\sum_{qm}\left(C_q j_q(kr)+D_q n_q(kr)\right)\times \left(M_{qm}P_q^m(\cos\theta)+N_{qm}Q_q^m(\cos\theta)\right)e^{im\varphi} \qquad (۴)$$

C_q, D_q, M_{qm}, N_{qm} ضرایب ثابت هستند و با اعمال شرایط مرزی یعنی صفربودن مولفه مماسی میدان الکتریکی و مولفه عمودی میدان مغناطیسی، مشخص می‌شوند. q و m ثابت‌های جداسازی هستند که شرط تک مقداری m را به اعداد صحیح محدود می‌کند اما هیچ

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-02]

محدودیت و الزامی برای q وجود ندارد. در مسایل مکانیک کوانتومی برای برقراری شرایط فیزیکی لازم است$q=l(l+1)$ (l عدد صحیح) انتخاب شود که در این صورت جواب های بخش شعاعی و قطبی، توابع وابسته لژاندر و بسل کروی هستند. واگرایی روی محور تقارن مخزن $\theta=0$ ، در کار ما با چگالش فوتون‌ها هماهنگ است بنابراین ما الزامی برای قید مذکور نداریم. در ادامه نشان می‌دهیم که حتی برای $q=l(l+1)$ ، فوتون‌ها در حالت پایا و ترازمند در پیکربندی‌های منظمی مشابه آرایه‌هایی از میکروکاواک‌ها نظم به خود می‌گیرند. در ادامه روابط مربوط به پتانسیل برداری، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، چگالی شار انرژی (بردار پوئین-تینگ **S**) و چگالی انرژی الکترومغناطیسی برای مد۲ و برخی نتایج مربوط به شاخه l,m=۲۰,۳ از مد ۱ را نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{A}^{(2)}_{lm}(\mathbf{r},t)=\begin{bmatrix} l(l+1)\dfrac{V_l(r)}{kr}X_{lm}(\theta)\hat{\mathbf{e}}_r+\\ \dfrac{W_l(r)}{kr}Y_{lm}(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta+\\ \dfrac{im}{\sin\theta}\dfrac{W_l(r)}{kr}X_{lm}(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{bmatrix}e^{i(m\varphi+\omega t)} \qquad (۵)$$

$$\mathbf{E}^{(2)}_{lm}(\mathbf{r},t)=\begin{bmatrix} -i\,\omega l(l+1)\dfrac{V_l(r)}{kr}X_{lm}(\theta)\hat{\mathbf{e}}_r\\ -i\,\omega\dfrac{W_l(r)}{kr}Y_{lm}(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta\\ +\dfrac{m\omega}{\sin\theta}\dfrac{W_l(r)}{kr}X_{lm}(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{bmatrix}e^{i(m\varphi+\omega t)}$$

$$\mathbf{H}^{(2)}_{lm}(\mathbf{r},t)=\begin{bmatrix} \dfrac{imk}{\mu\sin\theta}V_l(r)X_{lm}(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta-\\ \dfrac{k}{\mu}V_l(r)Y_{lm}(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{bmatrix}e^{i(m\varphi+\omega t)}$$

$$\mathbf{S}^{(2)}_{lm}(\mathbf{r},t)=\omega\frac{V_l(r)}{\mu r}\sin(m\varphi+\omega t)\times \begin{bmatrix} W_l(r)\left(\dfrac{m^2}{\sin^2\theta}X^2_{lm}(\theta)-Y^2_{lm}(\theta)\right)\cos(m\varphi+\omega t)\hat{\mathbf{e}}_r+\\ l(l+1)V_l(r)X_{lm}(\theta)Y_{lm}(\theta)\cos(m\varphi+\omega t)\hat{\mathbf{e}}_\theta-\\ l(l+1)\omega\dfrac{m}{\sin\theta}V_l(r)X^2_{lm}(\theta)\sin(m\varphi+\omega t)\hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)}_{lm}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} l^2(l+1)^2\dfrac{V_l^2(r)}{r^2}X^2_{lm}(\theta)+\\ \left(\dfrac{W_l^2(r)}{r^2}+k^2V_l^2(r)\right)\times\\ \left(\dfrac{m^2}{\sin^2\theta}X^2_{lm}(\theta)+Y^2_{lm}(\theta)\right) \end{bmatrix}$$

که در آنها:

(۶)

$$V_l(r)=\left(n_l(kr)-\frac{n_l(ka)+a\,\partial n_l(kr)/\partial r\big|_{r=a}}{j_l(ka)+a\,\partial j_l(kr)/\partial r\big|_{r=a}}j_l(kr)\right)$$

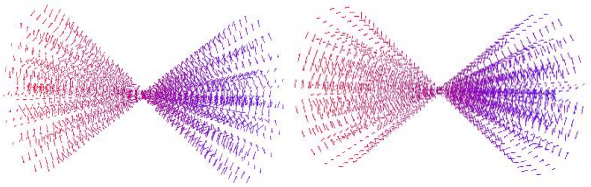
$$X_{lm}(\theta)=\left(Q_l^m(\cos\theta)-\frac{Q_l^m(\cos\theta_0)}{P_l^m(\cos\theta_0)}P_l^m(\cos\theta)\right)$$

$$W_l(r)=\frac{d\left(rV_l(r)\right)}{dr}\qquad Y_{lm}(\theta)=\frac{d\left(X_{lm}(\theta)\right)}{d\theta}$$

وجود دو مد پایا با شاخه‌های متعدد و عوامل مختلفی مانندq ، a، θ_0، T و λ از ظرفیت های موجود در این مساله است. ما دما را دمای اتاق فرض می‌کنیم و طول موج را طول موج غالب طبق قانون جابجایی وین برای تابش جسم سیاه درنظر می‌گیریم. از طرف دیگر شعاع سطوح کروی دو انتها را $a=10^3\lambda$ و زاویه راس دو بخش مخروطی را برای شاخه l,m=۲۰,۳ یکی از جواب‌های شرط فعال و پایا بودن:

$$\left.\frac{dQ_q^m(\cos\theta)/d\theta}{dP_q^m(\cos\theta)/d\theta}\right|_{\theta=\theta_0}=\left.\frac{dQ_q^m(\cos\theta)/d\theta}{dP_q^m(\cos\theta)/d\theta}\right|_{\theta=\pi-\theta_0} \qquad (۷)$$

انتخاب می‌کنیم. شکل ۱ نمایش سه بعدی از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، به عنوان یک نمونه از بررسی‌های اولیه و کیفی ما را نمایش می‌دهد که در آنها برقرار بودن شرایط مرزی و افزایش شدت میدان‌ها با نزدیک شدن به محور تقارن و/یا مرکز مخزن مشاهده می‌شود.



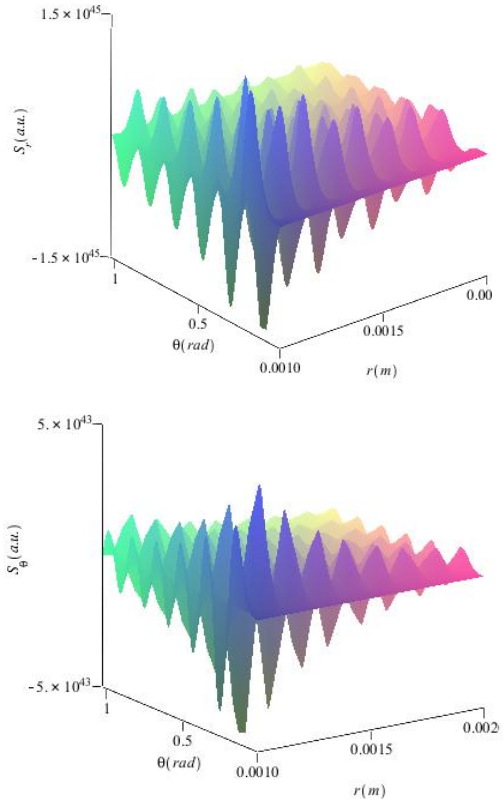
شکل۱: نمایش سه بعدی میدان الکتریکی (راست) و مغناطیسی (چپ) برای شاخه l,m=۲۰,۳ از مد۱.

در هر زاویه سمتی φ، مولفه شعاعی و قطبی **S** صفرهای متعددی در راستای $\hat{\mathbf{e}}_r$ و $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ دارند(شکل‌های ۲ و ۳). از طرف دیگر *میانگین زمانی* **S** تنها در راستای سمتی مخالف صفر می‌باشد. صفرها در راستای شعاعی به منزله سطوح گره کروی و صفرها در راستای قطبی به منزله سطوح گره مخروطی باعث ایجاد موج ایستاده در این دو راستا می‌شوند که می‌توان از آن، هم نانسبیتی شدن

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-02]

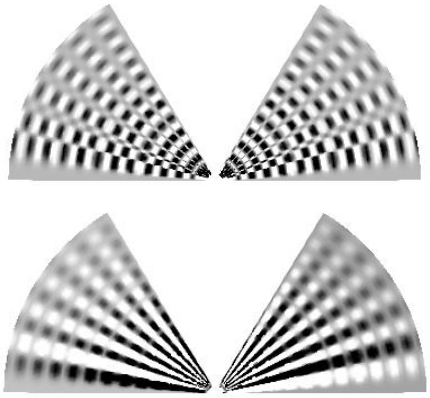
رابطه پاشندگی فوتون‌ها و هم ثابت باقی ماندن تعداد آنها در هر بسته لوله‌ای شکل را نتیجه‌گیری نمود. مقطع این لوله‌ها یا بسته‌های فوتونی در هر φ و در تمام قسمت‌ها شکل یکسانی به صورت ▭ دارد به گونه‌ای که پتانسیل حاصل، فوتون‌ها را به سمت مرکز و محور مخزن سوق می‌دهد ولی در حالت پایا و ترازمند تعداد فوتون‌ها در هر بسته ثابت است و شارش فوتون‌ها فقط در راستای سمتی $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ امکان پذیر می‌باشد. اگر تابشی از بیرون به درون محفظه تابانیده شود فوتون‌ها در هر بسته به بسته-های نزدیکتر به محور و مرکز محفظه تونل‌زنی خواهند نمود. نتایج و پیش‌بینی‌هایی که به این ترتیب از روابط و نمودارهای ما بدست می‌آید تامل‌برانگیز می‌باشند.

در شکل۲ تغییرات مولفه شعاعی و قطبی بردار پوئین-تینگ در زاویه سمتی $\varphi=\pi/4$ بر حسب r و θ در یک لحظه زمانی نشان داده شده است. صفرهای متعدد در راستای شعاعی و قطبی بوضوح قابل مشاهده‌اند.



شکل۲: تغییرات مولفه شعاعی (بالا) و قطبی (پایین) $\mathbf{S}$ برای l,m=۲۰,۳ مد۱. در محدوده $r=0.1a..0.2a$ و $\theta=0..\theta0$.

در شکل ۳ روشن‌ترین و تاریک‌ترین نواحی به ترتیب بزرگترین مقدار مثبت و کوچکترین مقدار منفی را نشان می‌دهند. تقارن معکوس و تغییر علامت که در دو سمت چپ و راست مخزن در مولفه قطبی دیده می‌شود با بازتابیدگی از مرزها و تشکیل امواج ایستاده هماهنگ است.



شکل۳: مولفه شعاعی (بالا) و قطبی (پایین) بردار $\mathbf{S}$ برای l,m=۲۰,۳ مد۱ مخزن فوتونی در محدوده $r=0.1a..0.5a$ و $\theta=0..\theta0$

۳- نتیجه‌گیری

نشان دادیم که در مخزن فوتونی معرفی‌شده، شرایط برای ایجاد خودبخودی یک پیکربندی پایا و ترازمند از آرایه-های منظم فوتونی فراهم است. بطوری‌که پیش‌بینی می-شود بتوان در ابعادی بزرگتر از میکروکاواک اپتیکی، وقوع چگالش فوتونی را مشاهده کرد. وجود دو مد اصلی متفاوت و متغیرهای مختلف قابل انتخاب در دستگاه، امکان بررسی‌های بیشتر و دقیق تر جهت بهینه کردن شرایط برای دست یافتن به چگالش فوتونی، نه در ابعاد کوچک و شرایط خاص، را فراهم می‌کند.

مراجع

[1] R. Y. Chiao and J. Boyce, *Phys. Rev.* **A 60**, 4114 (1999).

[2] Z. Cheng, J. Opt. Soc. Am. B 19, 1692 (2002).

[3] Z. Cheng, Phys. Rev. A 80, 033826 (2009).

[4] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger and M. Weitz, Nature 468, 545 (2010)and) and J. Klaers, F. Vewinger and M. Weitz, Nature Physics, 6, 512 (2010).

[5] J. Klaers, J. Schmitt, T. Damm, F. Vewinger and M. Weitz, Appl Phys B 105, 17 (2011) and J. Klaers, J. Schmitt, T. Damm, F. Vewinger and M. Weitz, Phys. Rev. Lett. 108, 160403 (2012).

[۶] م. اعتصامی، ن. دشتی، آ. خوش‌خواهد، مقاله نامه سومین کنفرانس پیشرفت‌های ابررسانایی، ص **۸۰** (۱۳۹۱) و م. اعتصامی، ن. دشتی□رحمت‌آبادی، پنجمین کنفرانس فیزیک آماری (۱۳۹۱).

[7] F. Saeb, M. Eatesami, Submitted.

[8] P. M. Morse, H. Feshbach. *Methods of Theorectical Physics*, McGraw-Hill Book Company (1953).

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-02]