



بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران  
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران  
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی



## درهم تنیدگی حالت‌های اتم دو ترازه با فوتون‌ها در یک محیط چپ‌گرد

شکوفه امینی، سارا راستگو و محمدمهدی گلشن

بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

چکیده - از آنجاکه درهم تنیدگی نقشی اساسی در حیطه‌ی محاسبات کوانتومی، ارتباطات کوانتومی و غیره بازی می‌کند، در این مقاله به بررسی درهم تنیدگی فوتون و اتم‌های دو ترازه در کاواکی که توسط یک محیط مغناطوی الکتریک چپ‌گرد احاطه شده است، می‌پردازیم. با استفاده از آنتروپی فون نویمان و در تقریب مارکوف، رفتار زمانی درهم تنیدگی اتم و میدان الکترومغناطیسی را برای یک حالت اولیه جدا پذیر محاسبه می‌نماییم. محاسبات ما نشان می‌دهد که درهم تنیدگی پس از رسیدن به مقداری بیشینه، دچار افت شده و با مرور زمان به‌طور مجانبی به سمت صفر میل می‌کند. همچنین مقایسه‌ای از رفتار درهم تنیدگی در محیط‌های چپ‌گرد نسبت به راست‌گرد ارائه می‌گردد.

کلیدواژه - اتم دو ترازه، تقریب مارکوف، درهم تنیدگی، محیط چپ‌گرد

## Entanglement of Two -Level Atoms and Photons in Left -Handed Materials

Sh. Amini, S. Rastgoo and M. M. Golshan

Physics Department, College of Sciences, Shiraz University

Abstract- Entanglement is well known to play a key role in the domains of quantum computing, quantum communication, etc. In this paper, we consider a cavity, surrounded by left-handed materials, in which a two- level atom interacts with photons. We employ von Neumann entropy, as a measure of entanglement, to describe the entanglement between atoms and the quantized electromagnetic field, in the Markov approximation. Starting from a separable state, it is shown that the degree of entanglement, as a function of time, varies from zero to a maximum and asymptotically diminishes. A comparison between this behavior and that in the right-handed materials is also given.

Keywords: Two -level Atoms, Markov approximation, Entanglement, left-handed materials

## ۱- مقدمه

پیشرفت‌های اخیر در زمینه‌ی ساخت مواد مصنوعی، منجر به ظهور محیط‌های مادی با ضریب شکست منفی شده است. با استفاده از مدل درود-لورنتس به راحتی دیده می‌شود که محیط‌های مزبور در یک بازه بسامدی مشخص گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی منفی را به نمایش می‌گذارند. انتشار امواج الکترومغناطیسی در این مواد اولین بار توسط وسلاگو در سال ۱۹۶۸ به طور نظری مورد مطالعه قرار گرفت. بر طبق معادلات ماکسول در این مواد بردار میدان الکتریکی، بردار میدان مغناطیسی و بردار موج یک دستگاه چپ‌گرد تشکیل می‌دهند. بردار پوینتینگ و بردار موج در این گونه مواد جهت‌های مخالف دارند به همین دلیل وسلاگو این مواد را چپ‌گرد نامید. این مواد ویژگی‌های نامتعارفی از خود نشان می‌دهند که از آن جمله می‌توان به ضریب شکست منفی، اثر دوپلر وارون و تابش چرنکوف وارون اشاره کرد [2,1]. با توجه به این مطالب انتظار می‌رود که رفتار ذرات باردار در برهم‌کنش با میدان الکترومغناطیسی در مواد چپ‌گرد در مقایسه با مواد معمول، تفاوت خواهد داشت. بدین ترتیب بررسی برهم‌کنش ذرات باردار (اتم) و میدان الکترومغناطیسی بخصوص در شکل کوانتومی آن از اهمیت بسزایی برخوردار می‌باشد. یکی از این زمینه‌ها بررسی در هم تنیدگی کوانتومی بین اتم و میدان الکترومغناطیسی را تشکیل می‌دهد. بنابراین با در نظر گرفتن کوانتش میدان در دی‌الکتریک‌ها، مبتنی بر تابع گرین [4,3]، و برهم‌کنش ذرات باردار با میدان الکترومغناطیسی در محیط مغناطو دی‌الکتریک چپ‌گرد [5]، به مطالعه دینامیک درهم تنیدگی خواهیم پرداخت. در این مقاله تغییرات زمانی درهم تنیدگی را با تقریب استاندارد مارکوف در محیط چپ‌گرد بررسی خواهد شد.

## ۲- هامیلتونی و دینامیک حالت‌های سیستم

فرض می‌کنیم اتم دو ترازه برانگیخته‌ای با تراز بالایی  $|u\rangle$  و تراز پایینی  $|l\rangle$  با تفاوت انرژی  $\hbar\omega_A$  در مرکز یک کاواک تهی به شعاع  $R$  قرار دارد. همچنین فرض می‌شود که این کاواک با ماده مغناطو دی‌الکتریک احاطه شده است. هامیلتونی سیستم تحت تقریب امواج چرخان

و دوقطبی الکتریکی به صورت زیر می‌باشد [5].

$$\hat{H} = \sum_{\lambda=e,m} \int d^3r \int d\omega \hbar \omega \hat{f}_{\lambda}^{\dagger}(\vec{r}, \omega) \hat{f}_{\lambda}(\vec{r}, \omega) + \hbar \omega_A \hat{\sigma}^{\dagger} \hat{\sigma} - [\hat{\sigma}^{\dagger} \vec{d}_A \cdot \int_0^{\infty} d\omega \vec{E}(\vec{r}, \omega) + H.c.] \quad (1)$$

اولین جمله، هامیلتونی میدان در محیط مغناطودی الکتریک، دومین جمله هامیلتونی اتم و سومین جمله مربوط به برهم‌کنش میدان و اتم دو ترازه است. در این رابطه،  $\hat{f}_{\lambda}^{\dagger}(\vec{r}, \omega)$  و  $\hat{f}_{\lambda}(\vec{r}, \omega)$ ، عملگرهای خلق و نابودی پلاریتون‌های الکتریکی و مغناطیسی هستند. همچنین  $\hat{\sigma}^{\dagger} = |u\rangle\langle l|$  و  $\hat{\sigma} = |l\rangle\langle u|$  به ترتیب عملگرهای بالا برنده و پایین برنده برای اتم دو ترازه و  $\vec{d}_A$  گشتاور دو قطبی گذار اتمی می‌باشد [5]. پایه‌های فضای هیلبرت مورد نظر به شکل  $|n_e, n_m, A\rangle = |n_e\rangle \otimes |n_m\rangle \otimes |A\rangle$  بوده که در آن  $|A\rangle$  حالت‌های اتمی و  $|n_e(m)\rangle$  حالت‌های پلاریتون الکتریکی (مغناطیسی) می‌باشند. فرض می‌کنیم که حالت اولیه سیستم  $|0,0,u\rangle$  باشد. بدین ترتیب حالت سیستم در هر لحظه عبارت خواهد بود [5]:

$$|\psi(t)\rangle = C_u(t) e^{-i\omega_A t} |0,0,u\rangle + \int d^3r \int_0^{\infty} d\omega \hbar \omega e^{-i\omega t} C_{el}(\vec{r}, \omega, t) |1(\vec{r}, \omega), 0, l\rangle + \int d^3r \int_0^{\infty} d\omega \hbar \omega e^{-i\omega t} C_{ml}(\vec{r}, \omega, t) |0, 1(\vec{r}, \omega), l\rangle \quad (2)$$

در رابطه اخیر  $C_u(t)$  و  $C_{\lambda l}(r, \omega, t)$  به ترتیب دامنه‌های احتمال حضور سیستم در حالتی با هیچ پلاریتون (حالت اولیه) و حالتی که در آن اتم به حالت پایه در حضور یک پلاریتون رفته است (حالت نهایی)، هستند. با استفاده از رابطه (۱) در معادله شرودینگر و بهنجارش ضرائب احتمال، معادلات جفت شده‌ای بدست می‌آید. می‌توان نشان داد که دامنه احتمال برای یافتن اتم در حالت برانگیخته از رابطه زیر نتیجه می‌شود [5]:

$$C_{el}(\vec{r}, \omega, t) = \sqrt{\frac{\text{Im} \varepsilon(\vec{r}, \omega)}{\pi \varepsilon_0 \hbar}} \left( \frac{\omega^2}{c^2} \right) d_A \cdot G^*(\vec{r}_A, \vec{r}, \omega) \times \left( \frac{e^{(i(\omega - \omega_A) - \frac{1}{2}\Gamma)t} - 1}{i(\omega - \omega_A) - \frac{1}{2}\Gamma} \right) \quad (6)$$

$$C_{ml}(\vec{r}, \omega, t) = \sqrt{-\frac{\text{Im} k(\vec{r}, \omega)}{\pi \varepsilon_0 \hbar}} \left( \frac{\omega}{c} \right) d_A \cdot [G^*(\vec{r}_A, \vec{r}, \omega) \times \nabla] \times \left( \frac{e^{(i(\omega - \omega_A) - \frac{1}{2}\Gamma)t} - 1}{i(\omega - \omega_A) - \frac{1}{2}\Gamma} \right) \quad (7)$$

در سه رابطه اخیر،  $\Gamma$  نرخ گسیل خودبخودی اتم دو ترازه است:  $\Gamma = 2\omega_A^2 \vec{d}_A \cdot \text{Im} G(\vec{r}_A, \vec{r}_A, \omega) \cdot \vec{d}_A / \varepsilon_0 \hbar c^2$ .

#### ۴- تحول زمانی عملگر چگالی و محاسبه

##### آنتروپی فون نویمان

روشهایی جهت سنجیدن شدت درهم تنیدگی وجود دارد [9] که در این مقاله آنتروپی فون نویمان را محاسبه می کنیم. خاطرنشان می شود که اگر پس از ردگیری جزئی روی یک زیرسیستم نتیجه یک آنسامبل آمیخته باشد، آنگاه زیرسیستم مذکور با سایر زیرسیستمها درهمتنیده است [10]. سیستم مورد نظر یک آنسامبل خالص را تشکیل می دهد، بنابراین عملگر چگالی  $\rho^F(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  می باشد. با استفاده از رابطه (۲) و رد گیری روی حالت های اتمی، عملگر چگالی کاهش یافته به صورت زیر نتیجه خواهد شد:

$$\begin{aligned} \rho^F(t) = & \text{Tr}_A(\rho^{AF}(t)) = |C_u(t)|^2 |0,0\rangle\langle 0,0| \\ & + \int d^3r \int_0^\infty d\omega \hbar \omega |C_{el}|^2 |1(\vec{r}, \omega), 0\rangle\langle 1(\vec{r}, \omega), 0| \\ & + \int d^3r \int_0^\infty d\omega \hbar \omega |C_{ml}|^2 |0,1(\vec{r}, \omega)\rangle\langle 0,1(\vec{r}, \omega)| \quad (8) \\ & + \int d^3r \int_0^\infty d\omega \hbar \omega C_{ml} C_{el}^* |0,1(\vec{r}, \omega)\rangle\langle 1(\vec{r}, \omega), 0| \\ & + \int d^3r \int_0^\infty d\omega \hbar \omega C_{el} C_{ml}^* |1(\vec{r}, \omega), 0\rangle\langle 0,1(\vec{r}, \omega)| \end{aligned}$$

برای محاسبه آنتروپی فون نویمان باید ویژه مقادیر  $\rho^F(t)$  را محاسبه نمود. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{C}_u(t) = & -\frac{1}{\pi \varepsilon_0 \hbar} \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{c^2} e^{-i(\omega - \omega_A)(t-t')} \\ & \times \vec{d}_A \cdot \text{Im} G(\vec{r}_A, \vec{r}_A, \omega) \cdot \vec{d}_A C_u(t') \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن  $G(\vec{r}_A, \vec{r}_A, \omega)$  با موقعیت اتمی  $\vec{r}_A$  تابع گرین کلاسیک می باشد که اثر محیط و ویژگیهای ماکروسکوپی محیط مثل گذردهی الکتریکی و پذیرفتاری مغناطیسی را بیان می کند [6,7]. شکل صریح تابع گرین که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است در [5] آمده است. همانگونه که در مرجع [8]، نشان داده شده است، با دانستن  $C_u(t)$  می توان دو دامنه احتمال دیگر،  $C_{el}$  و  $C_{ml}$  را حساب نمود.

#### ۳- محاسبه دامنه های احتمال در تقریب

##### مارکوف

معادله (۳) را می توان برای هر رژیم جفت شدگی دلخواه به کار برد اما مطالعه مساله مورد نظر را به رژیم جفت شدگی ضعیف محدود می کنیم که بر طبق آن می توان از تقریب مارکوف استفاده نمود. در سیستم مارکوفی حافظه سیستم از بین می رود و رفتار سیستم در زمان مطالعه آن به رفتار در زمان گذشته مربوط نخواهد شد [7]. با استفاده از این تقریب می توان  $C_u(t)$  را جایگزین  $C_u(t')$  در سمت راست رابطه (۳) نموده، رابطه زیر را بدست آورد:

$$\begin{aligned} \dot{C}_u(t) = & -\frac{C_u(t)}{\pi \varepsilon_0 \hbar} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{c^2} \\ & \left[ \pi \delta(\omega_A - \omega) + iP \left( \frac{1}{(\omega_A - \omega)} \right) \right] \\ & \times \vec{d}_A \cdot \text{Im} G(\vec{r}_A, \vec{r}_A, \omega) \cdot \vec{d}_A \end{aligned} \quad (4)$$

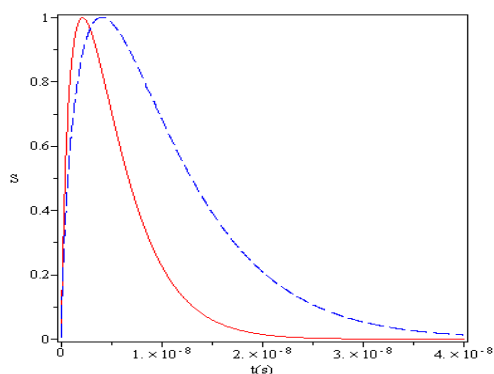
که در آن از

$$\int_0^t dt' e^{-i(\omega - \omega_A)(t-t')} \rightarrow \pi \delta(\omega_A - \omega) + iP(1/(\omega_A - \omega)) \quad (5)$$

استفاده شده است. با صرف نظر کردن از قسمت اصلی انتگرال که جابجایی فرکانس گذار اتمی را می دهد خواهیم داشت،  $C_u(t) = \exp(-\Gamma t/2)$  و

$$\lambda_1 = |C_u|^2, \lambda_2 = |C_{el}|^2 + |C_{ml}|^2 = 1 - |C_u|^2, \lambda_3 = 0 \quad (9)$$

\*مقایسه تغییرات درهم تنیدگی در محیط های چپ گرد نسبت به راستگرد نشان می دهد که درهم تنیدگی در محیط های راستگرد (ضریب شکست مثبت) در مقایسه با محیط های چپ گرد (ضریب شکست منفی) دیرتر دچار اتلاف می شوند.



شکل ۲: مقایسه تغییرات درهم تنیدگی اتم با زمان به ازای  $\gamma_e = \gamma_m = 0.001$  برای محیط چپ گرد (نمودار قرمز، پر) و محیط راستگرد (نمودار آبی، خط چین). این دو نمودار نیز با استفاده از داده های شکل (۱) رسم شده است.

## مراجع

- [1] V. G. Veselago, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\mu, \epsilon$*  Sov. Phys. Usp. **10**, 509-514, (1968).
- [2] R. M. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, *Experimental verification of a negative refraction index of refraction* Science, **292**, 77, (2001).
- [3] T. Gruner and D. G. Welsch, *Green function approach to the radiation field quantization for homogeneous kramers - kronig dielectrics*, Phys. Rev. A **53**, 1818 (1996).
- [4] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum optics*, Cambridge University Press (1997).
- [5] H. T. Dung, S. Y. Buhmann, L. Knoll, and D. G. Welsh, *Electromagnetic-field quantization and spontaneous decay in left-handed media*, Phys. Rev. A **68**, 043816 (2003).
- [6] L. Knoll, S. Scheel, and D. G. Welsch, in *Coherence and Statistics of Photon and Atoms*, (2001).
- [7] H. T. Dung, L. Knoll, and D. G. Welsh, *Resonant dipole-dipole interaction in the presence of dispersing and absorbing surroundings*, Phys. Rev. A **66**, 063810 (2002).
- [8] شکوفه امینی، پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک اتمی، درهم تنیدگی حالت های اتم دو ترازه با فوتون ها در محیط چپ گرد دانشگاه شیراز، (۱۳۹۱).
- [9] M. B. Plenio and S. Virmani, *An introduction to entanglement measures*, Quant comp. **7**, (2007).
- [10] F. Amiri, S. Rastgoo and M. M. Golshan, Phys. Lett. A **378**, 1985-1991 (2014).

طبق رابطه ی  $S_{IN} = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i$ ، آنتروپی فون نویمان در سیستم مورد نظر به صورت زیر خواهد شد.

$$S_{IN} = -|C_u|^2 \ln |C_u|^2 - (1 - |C_u|^2) \ln (1 - |C_u|^2) \quad (10)$$

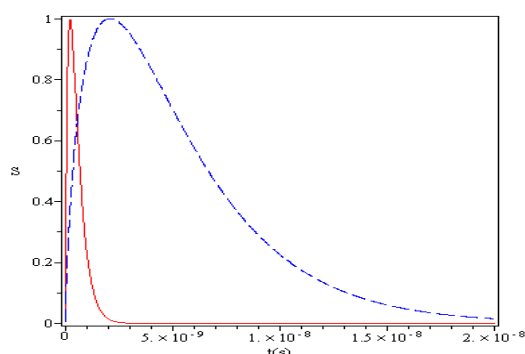
که در آن  $C_u(t)$  قبل از رابطه (۶) تعریف شده است.

## ۵- نتیجه گیری

با استفاده از رابطه (۱۰) و  $C_u(t) = \exp(-\Gamma t/2)$ ، درجه-ی درهم تنیدگی اتم دو ترازه با فوتون ها در حضور ماده چپ گرد محاسبه و رفتار زمانی آن، به ازای دو مقدار ضریب جذب، در شکل (۱) نشان داده شده است. همچنین در شکل (۲) این رفتار برای دو محیط راستگرد و چپ گرد ارائه شده است. از این دو شکل نتایج زیر مشاهده می شود.

\* سیستم در لحظه صفر در یک حالت جداپذیر قرار داشته و با گذر زمان در سیستم درهم تنیدگی تولید می شود. درهم تنیدگی پس از رسیدن به مقداری بیشینه، دچار افت شده و با مرور زمان به طور مجانبی به سمت صفر میل می کند.

\* با مقایسه ی درهم تنیدگی به ازای ضرایب متفاوت اتلاف (جذب) به این نتیجه رسیدیم که با افزایش جذب، تغییرات زمانی درهم تنیدگی سریعتر میرا می شوند.



شکل ۳: تغییرات درهم تنیدگی اتم با زمان به ازای  $\gamma_e = \gamma_m = 0.01$  (نمودار قرمز، پر).  $\gamma_e = \gamma_m = 0.001$  (نمودار آبی، خط چین). برای رسم این نمودارها از داده های زیر استفاده شده است.  $\omega_{pm} = 0.43\omega_{Im}$ ،  $\omega_{Im} = 10^{10} \text{ (Hz)}$ ،  $\omega_{Te} = 1.03\omega_{Im}$ ،  $\omega_{Pe} = 0.75\omega_{Im}$ .