

الکترو دینامیک کوانتومی کاواک بر مبنای اسپین و فوتون

مسلم علیدوستی شهرکی، سینا خراسانی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده فنی دانشگاه تهران، تهران

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

چکیده - در این مقاله روشی بدیع برای شبیه سازی و بررسی سیستم های کوانتوم نوری بر مبنای درهم تنیدگی اسپین و فوتون ارائه می شود. الکترو دینامیک کوانتومی کاواک مربوطه را برای این نوع از سیستم ها توسعه داده ایم. و براساس آن سیستمی واقعی را که متشکل از یک نقطه کوانتومی با کیوبیت اسپینی در حضور میدان مغناطیسی خارجی در برهم کنش با یک مد کاواک اشغال شده با کیوبیت فوتونی، شبیه سازی گردید. در ادامه مقادیر درهم تنیدگی سیستم و احتمال حضور سیستم محاسبه و رسم شدند. نتایج حاصل تا حد بسیار نزدیکی مشابه با نتایج آزمایشگاهی سیستم واقعی هستند. با این روش امکان محاسبه ضریب جفت شدگی در سیستم فراهم گردید.

کلید واژه - الکترو دینامیک کوانتومی کاواک، درهم تنیدگی، کیوبیت اسپینی، کیوبیت فوتونی

Spin-Photon Based Cavity Quantum Electrodynamics

Moslem Alidoosty Shahraki, Sina Khorasani

School of electrical engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

School of electrical engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Abstract- In this paper a novel method dealing the quantum optic systems having spin and photon entanglement is presented. Cavity quantum electrodynamics was expanded for such systems. Then a real system consists of a quantum dot with spin qubit in the presence of an external magnetic field in interaction with a cavity mode occupied with photon qubit was simulated precisely. In the simulation entanglement and presence probability values were measured and compared with those of real experiments. Results are very close to the experimental results. Our method made it possible to measure the coupling constant of the experimental system.

Keywords: Cavity Quantum Electrodynamics, Entanglement, Photon Qubit, Spin Qubit,

۱- مقدمه

تنیدگی با یک کیوبیت فوتونی با طول موج مخابراتی داشته باشد [۱-۲]. به عنوان مثال در پردازشگرهای کوانتومی ایده ی محاسبات کوانتومی توزیع شده وجود دارد، به این ترتیب که نودهای پردازشگر کوانتومی با استفاده از تک فوتون هایی که با کیوبیت های اسپینی درهم تنیدگی دارند متصل شده اند [۳]. دو تکنولوژی کلیدی در شبکه های مخابرات و پردازشگرهای کوانتومی با پایه مخابرات کوانتومی، اول انتقال کوانتومی از کیوبیت فوتونی به کیوبیت ماده می باشد و دوم تکرار کننده کوانتومی می باشد که وظیفه خلق و ذخیره سازی حالت های درهم تنیده کیوبیت های ماده را داشته باشد [۴]. این دو تکنولوژی اصلی وابسته به توان تولید درهم تنیدگی مابین کیوبیت ماده و کیوبیت فوتون در فواصل بلند می باشند. در کارهایی که تاکنون برای بررسی و شبیه سازی درهم تنیدگی

شبکه ها و مخابرات کوانتومی، انتقال کوانتومی فاصله دور^۱، پردازش اطلاعات کوانتومی و بسیاری از دیگر کاربردهای در حال ظهور به عنوان قسمتی از لبه های دانش بشر بدون شک وابسته به توسعه الکترو دینامیک کوانتومی کاواک و خصوصا از نوع بر مبنای اسپین- فوتون می باشند. در همه این زمینه های علمی لازم است که بیت کوانتومی (کیوبیت) مبتنی بر ماده (سیستم ساطع کنند مانند نقطه کوانتومی) دارای در هم

¹ Long-distance quantum teleportation

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)\rangle &= \sum_{A,F} \phi(A,F) |A \uparrow\rangle |A \downarrow\rangle |F \uparrow\rangle |F \downarrow\rangle \\
|A \uparrow\rangle &= \bigotimes_{n=1}^k \left| r_n \uparrow \right\rangle = \left| r_1 \uparrow \right\rangle \left| r_2 \uparrow \right\rangle \dots \left| r_k \uparrow \right\rangle \quad 1 \leq r_n \leq B_n \\
|A \downarrow\rangle &= \bigotimes_{n=1}^k \left| r_n \downarrow \right\rangle = \left| r_1 \downarrow \right\rangle \left| r_2 \downarrow \right\rangle \dots \left| r_k \downarrow \right\rangle \\
|F \uparrow\rangle &= \bigotimes_{\nu=1}^{\omega} |f_{\nu} \uparrow\rangle = |f_1 \uparrow\rangle |f_2 \uparrow\rangle \dots |f_{\omega} \uparrow\rangle \quad 0 \leq f_{\nu} \leq N_{\nu} \\
|F \downarrow\rangle &= \bigotimes_{\nu=1}^{\omega} |f_{\nu} \downarrow\rangle = |f_1 \downarrow\rangle |f_2 \downarrow\rangle \dots |f_{\omega} \downarrow\rangle
\end{aligned} \quad (1)$$

در معادله (۱) کت $|A \uparrow\rangle$ و $|A \downarrow\rangle$ حالت‌های سطوح انرژی مختلف گسیلنده‌های نور کوانتومی تشکیل شده از حالت‌های ویژه $|A\rangle$ هستند. این حالت‌ها ناشی از میدان مغناطیسی خارجی هستند. تعداد گسیلنده‌های نور کوانتومی n ، و r_n سطح انرژی نقطه‌ای کوانتومی n ام است. تعداد فوتون‌های کاواک با ν نشان داده می‌شود می‌تواند که دارای دو حالت ویژه $|F \uparrow\rangle$ و $|F \downarrow\rangle$ براساس نوع قطبش هستند. هامیلتونی در این سیستم با توجه به $[\lambda]$ به صورت معادله‌ی (۲) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} &= \hat{\mathbb{H}}_0 + \hat{\mathbb{H}}_{\mathbf{r},\mathbf{E}} + \hat{\mathbb{H}}_{\mathbf{r},\mathbf{r}} \\
\hat{\mathbb{H}}_0 &= \sum_{n,i} \left(E_{i\uparrow}^n \hat{\sigma}_{i\uparrow}^n + E_{i\downarrow}^n \hat{\sigma}_{i\downarrow}^n \right) + \\
&\quad \sum_{\nu} \left(\hbar \Omega_{\nu\uparrow} \hat{a}_{\nu\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{\nu\uparrow} + \hbar \Omega_{\nu\downarrow} \hat{a}_{\nu\downarrow}^{\dagger} \hat{a}_{\nu\downarrow} \right) \\
\hat{\mathbb{H}}_{\mathbf{r},\mathbf{E}} &= \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i\uparrow,j\downarrow}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j\downarrow,i\uparrow}^n \right) \times \\
&\quad \sum_{\nu} \left(g_{nij\nu\uparrow} \hat{a}_{\nu\uparrow} + g_{nij\nu\downarrow}^* \hat{a}_{\nu\downarrow}^{\dagger} \right) \\
&\quad + \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i\downarrow,j\uparrow}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j\uparrow,i\downarrow}^n \right) \times \\
&\quad \sum_{\nu} \left(g_{nij\nu\downarrow} \hat{a}_{\nu\downarrow} + g_{nij\nu\uparrow}^* \hat{a}_{\nu\uparrow}^{\dagger} \right) \\
\hat{\mathbb{H}}_{\mathbf{r},\mathbf{r}} &= \sum_{n < m} \left(\left(\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i\uparrow,j\uparrow}^n + \alpha_{nij} \hat{\sigma}_{i\downarrow,j\downarrow}^n + \delta_{nij} \hat{\sigma}_{i\uparrow,j\downarrow}^n \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i\uparrow,j\uparrow}^m + \alpha_{mij} \hat{\sigma}_{i\downarrow,j\downarrow}^m + \delta_{mij} \hat{\sigma}_{i\uparrow,j\downarrow}^m \right) \right)
\end{aligned} \quad (2)$$

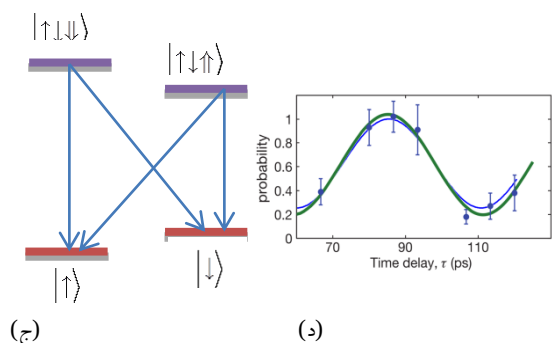
در (۲)، $\hat{\mathbb{H}}_0$ انرژی سیستم را بدون هر گونه برهم‌کنشی بیان می‌کند. $\hat{\mathbb{H}}_{\mathbf{r},\mathbf{E}}$ مربوط به برهم‌کنش نور و گسیلنده است و $\hat{\mathbb{H}}_{\mathbf{r},\mathbf{r}}$ توصیف‌کننده برهم‌کنش مابین هر دو گسیلنده است. γ_{nij} عناصر ماتریس عملگر دوقطبی گسیلنده‌ی n ام است، شدت برهم‌کنش دوقطبی مابین گسیلنده n ام و مد ν ام فوتون قطبیده شده عمودی و افقی در انتقال از تراز انرژی i ام به j ام، $g_{nij\nu\uparrow}$ و $g_{nij\nu\downarrow}$ است. η_{nij} متناسب با شدت دوقطبی تولید شده هنگام متحمل شدن انتقال از تراز i ام به j ام است. $E_{i\uparrow}^n$ و $E_{i\downarrow}^n$ دلالت می‌کند به مقدار سطح انرژی i ام گسیلنده‌ی n ام

کوانتومی اسپین و فوتون مشاهده شده است، سیستم‌ها ساده و محدودی هستند که به طور فیزیکی ساخته شده‌اند مانند $[\Delta]$ که بسیار محدود می‌باشد. بنابراین به منظور شبیه سازی و امکان مطالعه دقیق این سیستم‌ها ابتدا در کارهای [۷۶] هامیلتونی جینس-کامینگز-پاول را برای یک سیستم دلخواه معرفی و نمادگذاری کردیم و در آن ضعف فضای هاینبرگ را در مطالعه این سیستم‌ها با تقریب موج چرخنده در رژیم جفت شدگی بسیار قوی را نشان دادیم. سپس در کار $[\lambda]$ موفق به ارائه‌ی شبیه‌سازی الکترودینامیک کوانتومی کاواک در فضای اصلی شرودینگر در سیستم‌های چندبخشی دلخواه بدون هیچ تقریبی شدیم و نشان دادیم چرا تقریب موج چرخنده در رژیم بسیار قوی مناسب نیست و مهم‌ترین اینکه رفتار آشوب در رژیم بسیار قوی در این سیستم‌ها را مشاهده کردیم. در کار بعدی [۹-۱۱] موفق به شبیه‌سازی یک سیستمی کوانتومی نُه‌بخشی و متشکل از هشت نقطه کوانتومی با نحوه قرار گیری زنجیره‌ای و تقریب عدم برهم‌کنش نقاط کوانتومی غیرهمسایه با یکدیگر گردیدیم و رفتار آشوب در رژیم بسیار را با محاسبه آنرویی مرتبه دوم کولموگرو ثابت کردیم. در ادامه با توجه به لزوم بررسی درهم‌تنیدگی کیوبیت‌های اسپینی و فوتونی و بنا به دلایلی که پیشتر ذکر شد به توسعه هامیلتونی توصیف کننده ارائه شده در $[\lambda]$ برای این سیستم‌ها پرداختیم. سپس برای اثبات عملی دقیق نظریه مربوط این روش مدل فیزیکی و واقعی آزمایش شده در $[4]$ را با استفاده از روش جدید و الگوریتم موجود در $[\lambda]$ شبیه سازی کردیم.

در این مقاله به گزارش تغییرات فضای حالت و هامیلتونی جدید با در نظر گرفتن حالت‌های مربوط به کیوبیت‌های اسپینی و فوتونی خواهیم پرداخت. سپس شبیه‌سازی آزمایش $[4]$ شامل محاسبه احتمال حضور و پارامتر هم‌نوایی با استفاده از روش تکامل یافته‌ی ارائه خواهد شد. نشان خواهیم داد که نتایج شگفت‌انگیز حاصله بسیار نزدیک به نتایج مدل فیزیکی هستند. در نتیجه با نزدیکی پاسخ‌ها امکان برآورد مقدار ثابت جفت شدگی در سیستم واقعی فراهم گردیده است.

۲- شبیه‌سازی عددی درهم‌تنیدگی اسپینی

در این قسمت، به ارائه نحوه گسترش الکترودینامیک کوانتومی کاواک برای سیستم‌های مد نظرمات می‌پردازیم. فضای حالت‌ها به همان روش $[\lambda]$ و به صورت زیر تکمیل شده است. در فضای حالت‌ها مربوطه حالت‌های ویژه اسپین‌ها و مدهای کاواک مربوط به فوتون‌ها قطبیده شده نیز در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۱: (الف) احتمال حضور، (ب) پارامتر هم‌نواپی بر حسب زمان، (ج) دو سیستم گسیلنده جفت‌شده (د) مقایسه احتمال حضور در شبیه‌سازی انجام شده (آبی) با نتیجه آزمایشگاهی (سبز) [۴].

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{A \uparrow = g \uparrow, g \downarrow, e \uparrow \downarrow} \sum_{A \downarrow = g \downarrow, g \uparrow, e \uparrow \downarrow} \sum_{F_1 \uparrow = 0}^1 \left\{ \sum_{F_1 \downarrow = 0}^1 \phi(A, F) |A \uparrow\rangle |A \downarrow\rangle |F_1 \uparrow\rangle |F_1 \downarrow\rangle \right\} \quad (1)$$

و هامیلتونی توصیف‌کننده سیستم با توجه به معادله ۲ به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = & \sum_{1, i = g \uparrow, g \downarrow, e \uparrow \downarrow} \left(E_i^1 \hat{\sigma}_i^1 + E_i^1 \hat{\sigma}_i^1 \right) \\ & + \sum \left(\hbar \Omega_{V \uparrow} \hat{a}_{V \uparrow}^\dagger \hat{a}_{V \uparrow} + \hbar \Omega_{V \downarrow} \hat{a}_{V \downarrow}^\dagger \hat{a}_{V \downarrow} \right) \\ \hat{H}_{r-E} = & \sum_{1, i = g \uparrow, g \downarrow, e \uparrow \downarrow} \left\{ \left(\gamma_{1ij} \hat{\sigma}_{i \uparrow, j \downarrow}^1 + \gamma_{1ij}^* \hat{\sigma}_{j \downarrow, i \uparrow}^1 \right) \right. \\ & \times \left(g_{1ij \nu_1 \uparrow} \hat{a}_{\nu_1 \uparrow} + g_{1ij \nu_1 \downarrow}^* \hat{a}_{\nu_1 \downarrow}^\dagger \right) \left. \right\} \\ & + \sum_{1, i < j} \left\{ \left(\gamma_{1ij} \hat{\sigma}_{i \downarrow, j \uparrow}^1 + \gamma_{1ij}^* \hat{\sigma}_{j \uparrow, i \downarrow}^1 \right) \right. \\ & \times \left(g_{1ij \nu_1 \downarrow} \hat{a}_{\nu_1 \downarrow} + g_{1ij \nu_1 \uparrow}^* \hat{a}_{\nu_1 \uparrow}^\dagger \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

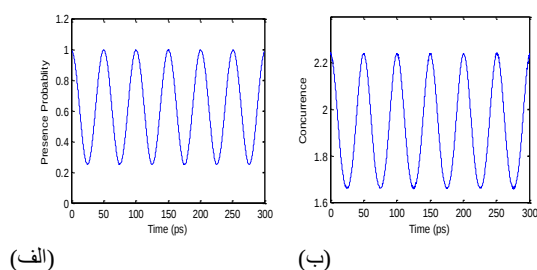
توجه شود که در رابطه ۴، i, j مربوط به حالت‌های انرژی هستند به نحوی که هر ترم i اشاره می‌کند سطح انرژی که پایین‌تر از سطح انرژی j می‌باشد. $\nu_1 \uparrow$ و $\nu_1 \downarrow$ اشاره می‌کند به مدهای کاواک که با فوتون قطبیده شده V و H اشغال شده است. ضمناً از آنجایی که $\hat{H}_{r-E}$ مربوط به برهم‌کنش نقاط کوانتومی مجاور است و در این‌جا در واقع یک نقطه کوانتومی داریم این قسمت از هامیلتونی را در نظر نمی‌گیریم. اکنون با استفاده از اعمال هامیلتونی و استفاده از روش تشریح شده در [۸] و حل معادله وابسته به زمان شرودینگر در فضای اصلی آن، ماتریس ضرایب حالت‌ها را بدون هر گونه تقریبی

در اسپین بالا و پایین به ترتیب $\hat{a}_{\nu \uparrow}^\dagger$ و $\hat{a}_{\nu \downarrow}^\dagger$ به ترتیب اپراتورهای خلق و نابودی فوتونی هستند و $\hat{\sigma}_{s,k}^l$ اپراتور گذار اتمی از تراز k به s است.

۳- شبیه‌سازی عددی درهم‌تنیدگی اسپین-فوتون سیستم واقعی

در این قسمت از مقاله به نحوه شبیه‌سازی درهم‌تنیدگی مشاهده شده در [۴] به روش ارائه شده خواهیم پرداخت. با توجه به آزمایش صورت گرفته در [۴] یک سیستم کوانتومی متشکل از یک گسیلنده نور کوانتومی دو ترازه از نوع InAs در یک میکروکاواک دو وجهی قرار گرفته است و در برهم‌کنش با یک مد کاواک است که با یک فوتون اشغال شده است. نقطه کوانتومی در حضور میدان مغناطیسی عمود بر جهت رشد آن به دو سیستم گسیلنده نوع L جفت‌شده تبدیل خواهد شد. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، هر یک از دو نقطه کوانتومی متشکل از حالت‌های انرژی پایه و برانگیخته مجزا هستند. و هر یک از حالت‌های برانگیخته دارای دو

الکترون جفت شده و یک حفره جفت نشده $|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$ و $|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle$ می‌باشد. و هر یک از آن‌ها به مانند شکل ۱ به دو حالت انرژی پایه دارای اسپین بالا و پایین $|\uparrow\rangle$ و $|\downarrow\rangle$ جفت‌اند. دو سیستم گسیلنده حاصل شده در برهم‌کنش با کیوبیت فوتونی (فوتون-های قطبیده شده H, V) در طول موج ۹۱۰.۱۰ nm می‌باشند. با توجه به [۴] اختلاف انرژی مابین دو سیستم گسیلنده حاصل شده ناشی از میدان مغناطیسی ۳ T مطابق با فرکانس زاویه‌ای $2\pi \times 17.6 \text{ GHz}$ می‌باشد. براساس رابطه ۱ فضای حالت این سیستم به صورت زیر خواهد بود.



- [4] K. D. Greve et al., "Quantum-dot spin-photon entanglement via frequency downconversion to telecom wavelength," *Nature*, doi:10.1038/nature 11577
- [5] J. Cai, A. Retzker, F. Jelezko, M. B. Plenio, "A large-scale quantum simulator on a diamond surface at room temperature," *Nature Phys.*, vol. 9, pp. 168-173, 2013.
- [6] A. H. Sadeghi, A. Naqavi, and S. Khorasani, Interaction of "Quantum Dot Molecules with Multi-mode Radiation Fields," *Scientia Iranica*, vol. 17, pp. 59-70, 2010.
- [7] E. Ahmadi, H. R. Chalabi, A. Arab, S. Khorasani, Cavity Quantum Electrodynamics in the Ultrastrong Coupling Regime, *Scientia Iranica*, vol. 18F(3), pp. 820-826, 2011.
- [8] M. Alidoosty, M. H. Aram, S. Khorasani, "Simulation of Multipartite Cavity Quantum Electrodynamics," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 49, no. 12, pp. 1066-1079, 2013.
- [9] M. Alidoosty Shahraki, S. Khorasani, and M. H. Aram, "Theory and Simulation of Cavity Quantum Electro-Dynamics in Multipartite Quantum Complex Systems," *Applied Physics A*, vol. 115, no. 2, pp. 595-603 (2014).
- [10] M. Alidoosty, S. Khorasani, "Calculation of Kolmogorov Entropy in Cavity Quantum Electrodynamics," *International Journal of Optics and Photonics*, vol. 7, no. 2, pp. 65-70, 2014.
- [11] M. Alidoosty Shahraki, S. Khorasani, "Calculation of Kolmogorov Entropy in Cavity Quantum Electrodynamics," *Proceedings of 20th Iranian Conference on Optics and Photonics* (online), pp. 225-228, 2014.
- [12] W. B. Gao, P. Fallahi, E. Togan, J. Miguel-Sanchez, and A. Imamoglu, "Observation of entanglement between quantum dot spin and a single photon," *Nature*, vol. 491, pp. 426-430, 2012.
- [13] A. Arab and S. Khorasani, "Fully automated code for exact and efficient analysis of quantum optical systems in the regime of ultrastrong coupling," *Proc. SPIE*, vol. 8268, 82681M, 2012
- [14] S. J. Akhtarshenas, "Concurrence vectors in arbitrary multipartite quantum systems," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 38, no. 30, pp. 67-77 2005.

استخراج می‌کنیم. در حل معادله وابسته به زمان شرویدینگر، شرایط اولیه با فرض قرار داشتن سیستم کوانتومی در حالت پایه به شرطی که کیوبیت اسپین بالا و پایین در حال برهم-کنش با یک مد کاواک اشغال شده توسط یک فوتون قطبیده شده‌ی H در رژیم جفت شدگی ضعیف هستند در نظر گرفته شده است.

احتمال حضور سیستم با توجه به رابطه ارائه شده در [۸] در حالتی که به عنوان شرط اولیه در نظر گرفته شد، محاسبه و در شکل ۱ رسم شده است. همچنین پارامتر هم‌نوایی سیستم با توجه به [۱۳-۱۴] محاسبه و در شکل ۱ رسم شده است. همان طور که از مشاهدات آزمایشگاهی در کارهای [۱۲و۴] انتظار داشتیم و با در نظر گرفتن جفت شدگی 7meV در سیستم مورد شبیه سازی خود، رفتار سینوسی احتمال حضور سیستم با پریود 50ps شبیه سازی گردید. که برابر با مقدار آزمایش شده $50 \pm 5ps$ [۴] می‌باشد. با نتیجه به دست آمده و مرتبه ثابت جفت شدگی در نظر گرفته شده در شبیه‌سازی اعتقاد داریم که رژیم جفت شدگی سیستم آزمایش شده در [۴] در رژیم جفت شدگی قوی است. همچنین مشاهده رفتار سینوسی در پارامتر هم‌نوایی تایید کننده صعود و نزول درهم-تنیدگی ما بین اسپین الکترون در نقطه کوانتومی و فوتون قطبیده شده می‌باشد. همان طور که در شکل ۱ مشاهده می-شود تغییرات احتمال مابین 0.25 تا ۱ می‌باشد در حالی که مقادیر آزمایش شده در 0.20 ± 0.05 [۴] تا 1 می‌باشند.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله زیربنای نظریه‌ی الکتروپدینامیک کوانتومی کاواک، شامل فضای حالت‌های سیستم و هامیلتونی توصیف‌کننده‌ی آن برای سیستم‌های بر مبنای درهم‌تنیدگی اسپین و فوتون گسترش داده شد. یک سیستم کوانتومی واقعی که اخیراً در این رابطه مورد آزمایش قرار گرفته شده بود مورد شبیه‌سازی با روش نظری ارائه شده، قرار گرفت. نتایج با تقریب بسیار قابل قبولی نزدیک به هم بودند (انحراف احتمال حضور حدود ± 0.05 از احتمال 0.2 و انحراف پریود حدود 5ps نسبت به پریود 50ps). با توجه به مشابه بودن نتایج امکان استخراج ثابت جفت شدگی در سیستم واقعی به دست آمد و نتیجه گیری شد که سیستم آزمایشگاهی در رژیم جفت شدگی قوی بوده است.

مراجع

- [1] Ritter, S. et al., "An elementary quantum network of single atoms in optical cavities," *Nature* 484, 195-200, 2012.
- [2] Togan, E. et al. Quantum entanglement between an optical photon and a solid state spin qubit. *Nature* 466, 730-734, 2012
- [3] J. Cirac et al. "Distributed quantum computation over noisy channels," *Phys. Rev. A* 59, 4249-4254-1999