بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

جفت‌شدگی بهینه بین اتم سه‌ترازی نوع Λ و یک میدان غیرخطی تک‌مد

مجتبی رستگارزاده بفروئی[۱] و محمّد کاظم توسّلی[۱و۲]

[۱]گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

[۲]گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده – براساس تعمیمی از الگوی جینز-کامینگز، برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی نوع Λ و یک میدان تابشی تک‌مد در یک رژیم وابسته به شدت را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن با یک تابع غیرخطی مناسب، سهم یک محیط کر-مانند نیز لحاظ شده‌است. در حالت تشدید از طریق یک شرط تناوبی، مقدار بهینه‌ای برای ثابت جفت‌شدگی اتم-میدان به‌دست می‌آوریم که به ازای آن، برانگیختگی‌های اتمی به‌طور متناوب با احتمال بیشینه (واحد) رخ می‌دهند.

کلید واژه- اتم سه‌ترازی نوع Λ، الگوی جینز-کامینگز ، جفت‌شدگی وابسته به شدت، محیط کر-مانند.

کد PACS- ۲۷۰/۰۲۷۰ (اپتیک کوانتومی)

Optimum coupling between a Λ-type three-level atom and a single-mode nonlinear field

M. Rastegarzadeh Bafroee[1] and M. K. Tavassoly[1, 2]

[1]Atomic & Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

[2]Photonic Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

Abstract- Based on the generalization of the Jaynes-Cummings model, we study the interaction between a Λ-type three-level atom and a single-mode radiation field in an intensity-dependent regime, in which the effect of Kerr-like medium is obtained by using an appropriate deformation function. Via the periodic condition, we will find an optimum value of coupling constant in resonance condition for which the atom suffers transitions with maximum (unit) probability, periodically.

Keywords: Λ-Type three-level atom, Jaynes-Cummings model, Intensity-dependent coupling, Kerr-like medium.

PACS No: 270.0270

مقدمه

در اپتیک کوانتومی برای بررسی برهم‌کنش اتم با میدان در رهیافتی کاملاً کوانتومی، الگوی جینز-کامینگز [۱و۲] و تعمیم‌های گوناگونی از آن [۳] معرفی شده‌است. مهم‌ترین مزیت این الگو، پیش‌گویی پدیده‌های فروافت و احیا در برانگیختگی‌های اتمی است که با نتایج تجربی نیز سازگارند. اخیراً ریکامی‌یر و کوردِرو [۴] تعمیمی غیرخطی از الگوی جینز-کامینگز را در نظر گرفتند و با انتخاب یک تابع غیرخطی مناسب، سهم یک محیط کر-مانند را به هامیلتونی برهم‌کنش اضافه کردند. آن‌ها نشان دادند که تحت شرایط اولیه‌ی معین، حالت تشدید برای سامانه‌ی معرفی شده به‌دست می‌آید. به‌علاوه، با وجود چنین شرایطی می‌توان یک مقدار بهینه برای ثابت جفت‌شدگی به‌دست آورد که با استفاده از آن بیشینه احتمال (واحد) برای برانگیختگی‌های اتمی به‌صورت متناوب حاصل می‌شود. با الهام از این رهیافت، ما به جای اتم دوترازی، یک اتم سه‌ترازی نوع Λ را در نظر خواهیم گرفت و برای سامانه‌ی جدید، یک مقدار بهینه برای ثابت جفت‌شدگی به‌دست خواهیم آورد.

هامیلتونی سامانه و حالت تحول یافته با آن

یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با حالت انرژی بالای $\langle 1|$ و دو حالت انرژی پایین $\langle 2|$ و $\langle 3|$، در نظر می‌گیریم. براساس الگوی جینز-کامینگز، هامیلتونی برهم‌کنش این اتم سه‌ترازی با یک میدان تک‌مد در یک رژیم وابسته به شدت به‌صورت زیر توصیف می‌شود ($\hbar = 1$):

$$\hat{H}_D = \frac{\nu}{2}(\hat{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{A}}^{\dagger}) + \sum_{j=1}^{3}\omega_j\,\hat{\sigma}_{jj} + + g_1(\hat{\mathrm{A}}\hat{\sigma}_{12} + \hat{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{\sigma}_{21}) + g_2(\hat{\mathrm{A}}\hat{\sigma}_{13} + \hat{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{\sigma}_{31}), \qquad (۱)$$

که در آن ν بسامد میدان، $\hat{\mathrm{A}}$ و $\hat{\mathrm{A}}^{\dagger}$ تعمیمی از عملگرهای نابودی ($\hat{a}$) و آفرینش ($\hat{a}^{\dagger}$) بوزونی‌اند که به‌صورت $\hat{\mathrm{A}} = \hat{a} f(\hat{\mathrm{n}})$ و $\hat{\mathrm{A}}^{\dagger} = f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}$ تعریف می‌شوند و $f(\hat{\mathrm{n}})$ یک تابع غیرخطی از عملگر تعداد $\hat{n} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ است. هم‌چنین ω_j انرژی jاُمین تراز اتمی، $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ $(i, j = 1,2,3)$ عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده ترازهای اتمی و g_1 و g_2 ثابت‌های جفت‌شدگی بین اتم و میدان هستند. با داشتن هامیلتونی سامانه، می‌توان بردار حالت آن را در هر زمان دلخواهی به‌دست آورد. بدین منظور، پس از محاسباتی چند، برای محاسبه ویژه‌مقادیر هامیلتونی (۱) در پایه‌ی حالت‌های $\langle 1,n|$، $\langle 2,n+1|$ و $\langle 3,n+1|$ به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\mu_\ell^3 + x_1\mu_\ell^2 + x_2\mu_\ell + x_3 = 0, \quad (\ell = 1,2,3) \qquad (۲)$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= -3\gamma,\\
x_2 &= 3\gamma^2 - \frac{1}{3}(\Delta_{12}{}^2 + \Delta_{13}{}^2 - \Delta_{12}\Delta_{13}) - (\Omega_1{}^2 + \Omega_2{}^2),\\
x_3 &= -\gamma^3 - \frac{1}{3}\gamma\Delta_{12}\Delta_{13} + \frac{1}{3}\gamma(\Delta_{12}{}^2 + \Delta_{13}{}^2) - \frac{2}{27}\Delta_{12}{}^3\\
&\quad - \frac{2}{27}\Delta_{13}{}^3 + \frac{1}{9}\Delta_{12}\Delta_{13}(\Delta_{12} + \Delta_{13}) + \gamma(\Omega_1{}^2 + \Omega_2{}^2)\\
&\quad + \frac{1}{3}\Omega_1{}^2(2\Delta_{13} - \Delta_{12}) + \frac{1}{3}\Omega_2{}^2(2\Delta_{12} - \Delta_{13}),
\end{aligned}$$

که در آن قرار داده‌ایم:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\nu}{6}[2(n+2)f^{\,2}(n+2) + 3(n+1)f^{\,2}(n+1)\\
&\qquad + nf^{\,2}(n)],\\
\Omega_1 &= g_1\sqrt{n+1}f\,(\mathrm{n}+1),\\
\Omega_2 &= g_2\sqrt{n+1}f\,(\mathrm{n}+1),
\end{aligned} \qquad (۳)$$

و هم‌چنین Δ_{12} و Δ_{13} بیان‌گر نامیزانی وابسته به شدت بین سطوح انرژی ترازهای اتمی و حالت‌های میدان هستند که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned}
\Delta_{12} &= \frac{\nu}{2}[(n+2)f^{\,2}(n+2) - nf^{\,2}(n)] - (\omega_1 - \omega_2),\\
\Delta_{13} &= \frac{\nu}{2}[(n+2)f^{\,2}(n+2) - nf^{\,2}(n)] - (\omega_1 - \omega_3),
\end{aligned} \qquad (۴)$$

برای ساده‌تر شدن محاسبات، اتم سه‌ترازی را به‌صورت تبهگن $(\omega_2 = \omega_3)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین روابط (۴) به رابطه‌ی زیر کاهش می‌یابند $(\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_n)$:

$$\Delta_n = \frac{\nu}{2}[(n+2)f^{\,2}(n+2) - nf^{\,2}(n)] - \omega_a, \qquad (۵)$$

که در آن ω_a فاصله‌ی انرژی بین تراز بالا و دو تراز پایین اتم است. بر این اساس، از حل معادله‌ی (۲) سه ویژه‌مقدار

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \gamma - \frac{\Delta_n}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_n{}^2 + 4\Omega_1{}^2 + 4\Omega_2{}^2},\\
\mu_2 &= \gamma - \frac{\Delta_n}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_n{}^2 + 4\Omega_1{}^2 + 4\Omega_2{}^2},\\
\mu_3 &= \gamma + \frac{\Delta_n}{3},
\end{aligned} \qquad (۶)$$

و نیز ویژه‌بردارهای متناظر با آن‌ها به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$|\varphi_\ell\rangle = a_\ell\,|1,n\rangle + b_\ell\,|2,n+1\rangle + c_\ell\,|3,n+1\rangle, \qquad (۷)$$

$$a_\ell = \left[1+\left(\frac{\Omega_1}{\mu_\ell-\gamma-\frac{\Delta_n}{3}}\right)^2+\left(\frac{\Omega_2}{\mu_\ell-\gamma-\frac{\Delta_n}{3}}\right)^2\right]^{-1/2}, \qquad \ell=1,2,3$$

$$b_\ell = \frac{\Omega_1}{\mu_\ell-\gamma-\frac{\Delta_n}{3}}a_\ell, \qquad c_\ell = \frac{\Omega_2}{\mu_\ell-\gamma-\frac{\Delta_n}{3}}a_\ell.$$

با این فرض که اتم در $t=0$ در حالت برانگیخته $|1\rangle$ و میدان به‌صورت برهم‌نهی‌ای از حالت‌های عددی باشد، می‌توان حالت سامانه را در آن لحظه به‌صورت زیر نوشت:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{3} p_n a_\ell\,|\varphi_\ell\rangle, \qquad (۸)$$

که $|p_n|^2$ نشان‌دهنده‌ی توزیع فوتونی میدان است. نهایتاً با اعمال عملگر تحول زمانی روی طرفین رابطه‌ی بالا، بردار حالت اتم-میدان در زمان t به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}|\psi(\mathrm{t})\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}[&A_n(\mathrm{t})|1,n\rangle + B_n(\mathrm{t})|2,n+1\rangle\\ &+C_n(\mathrm{t})|3,n+1\rangle],\end{aligned} \qquad (۹)$$

که $A_n(\mathrm{t})$، $\mathrm{B}_n(\mathrm{t})$ و $\mathrm{C}_n(\mathrm{t})$ دامنه‌های احتمال هستند:

$$A_n(\mathrm{t}) = \sum_{\ell=1}^{3} p_n a_\ell^2 e^{-i\mu_\ell t}, \quad B_n(\mathrm{t}) = \sum_{\ell=1}^{3} p_n a_\ell b_\ell e^{-i\mu_\ell t},$$

$$C_n(\mathrm{t}) = \sum_{\ell=1}^{3} p_n a_\ell c_\ell e^{-i\mu_\ell t}.$$

شرط تشدید در یک سامانه‌ی معین

اکنون با در نظر گرفتن یک تابع غیرخطی خاص، به‌صورت

$$f(\mathrm{n}) = \sqrt{1+\chi n}, \qquad \chi>0, \qquad (۱۰)$$

می توان اثر حضور یک محیط کر-مانند را در هامیلتونی (۱) لحاظ کرد. با این انتخاب، از رابطه‌ی (۴) برای نامیزانی Δ_n رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Delta_n}{\omega_a} = \frac{\nu}{\omega_a}[2\chi(n+1)+1]-1, \qquad n=0,1,2,\ldots. \qquad (۱۱)$$

روشن است که وقوع گذارهای کامل، تحت شرایط تشدید میسر خواهد بود. به راحتی می‌توان ثابت کرد که شرط تشدید $\Delta_n=0$ برای مقادیر معین $n=N$ و $\frac{\omega_a}{\nu}$، به رابطه‌ی زیر منتهی می‌شود:

$$\chi = \frac{1}{2(\mathrm{N}+1)}\left[\frac{\omega_a}{\nu}-1\right], \qquad \frac{\omega_a}{\nu}>1 \qquad (۱۲)$$

با وجود شرط $\Delta_N=0$ می‌توان رابطه‌ی (۱۱) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\Delta_{N+r}}{\omega_a} = r(2\chi\frac{\nu}{\omega_a}), \qquad \mathrm{r}=-\mathrm{N},-N+1,\ldots. \qquad (۱۳)$$

ثابت جفت‌شدگی بهینه

با توجه به حالت به‌دست آمده در (۹) احتمال حضور اتم در حالت برانگیخته $|1\rangle$ در زمان t، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}P_{11}(\mathrm{t}) &= \sum_{n=0}^{\infty}|A_n(\mathrm{t})|^2\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|p_n|^2\sum_{\ell,k=1}^{3} a_\ell^2 a_k^2 e^{-i(\mu_\ell-\mu_k)\mathrm{t}}.\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

براساس این رابطه، برای داشتن بیشینه احتمال با دوره‌ی تناوب T، باید به ازای هر n شرط زیر برآورده شود:

$$\sum_{\ell,k=1}^{3}\mathrm{a}_\ell^2\mathrm{a}_k^2 e^{-i(\mu_\ell-\mu_k)T} = 1 \qquad (۱۵)$$

از شرط اخیر، در حالت خاص تشدید برای $n=N$ می‌توان دوره‌ی تناوب T را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$T = \frac{m_0\pi}{g_{eff}\sqrt{N+1}f(\mathrm{N}+1)}, \qquad (۱۶)$$

که در آن m_0 را یک عدد صحیح مثبت و g_{eff} را یک ثابت جفت‌شدگی مؤثر به‌صورت $g_{eff}=\sqrt{g_1^2+g_2^2}$ در نظر گرفته‌ایم. به‌طور کلی، می‌توان شرط (۱۵) را به ازای هر $n=N+r$ به‌صورت زیر نوشت:

$$(\mu_\ell-\mu_k)\mathrm{T} = 2(\mathrm{m}_0+\mathrm{r}\,\lambda)\pi, \quad \mathrm{r}=-\mathrm{N},-\mathrm{N}+1,\ldots \qquad (۱۷)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۶) و در نظر گرفتن رابطه‌ی زیر

$$m_0 = \lambda\left(\frac{\nu}{\omega_a}+1\right)(\mathrm{N}+1), \qquad (۱۸)$$

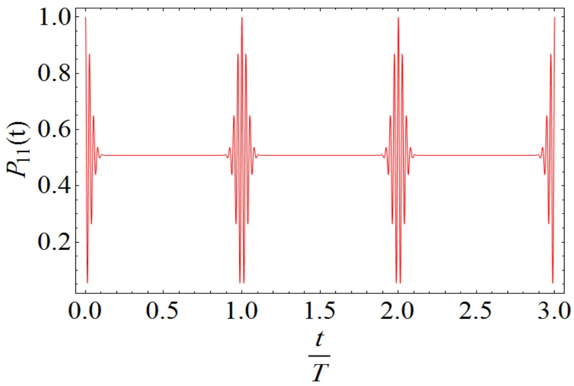
که در آن λ کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که m_0 به ازای آن صحیح و مثبت خواهد شد، پس از محاسبات طولانی مقدار بهینه زیر برای ثابت جفت‌شدگی مؤثر به‌دست می آید:

$$\frac{g_{eff}}{\nu} = (\frac{\omega_a}{\nu}-1)\left[\frac{1}{2(N+1)}(\frac{\omega_a}{\nu}+1)\right]^{1/2}. \qquad (۱۹)$$

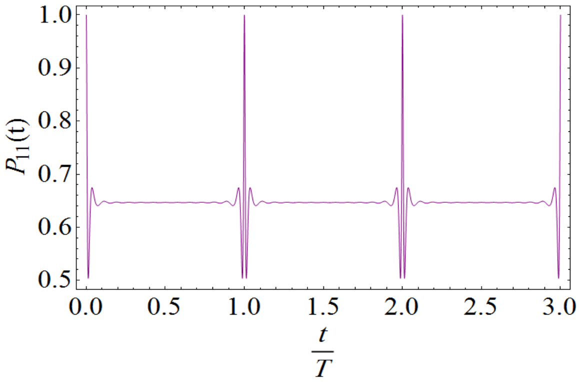
شایان ذکر است که ثابت جفت‌شدگی به‌دست آمده مستقل از توزیع فوتونی میدان است و تنها با داشتن مقادیری معین برای $\frac{\omega_a}{\nu}$ و N، می‌توان آن را به‌دست آورد. حال برای میدان در آغاز برهم‌کنش، دو توزیع فوتونی متناظر با حالت همدوس استاندارد و حالت گرمایی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \rho_{CS}(0) &= |p_n|^2 = e^{-\langle n\rangle}\frac{\langle n\rangle^{2n}}{n!}, \\ \rho_{TS}(0) &= |p_n|^2 = \frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}, \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

که در آن‌ها $\langle n\rangle$ میانگین تعداد فوتون‌های میدان در لحظه‌ی شروع برهم‌کنش است و ما آن را برابر N می‌گیریم تا شرایط تشدید برای $n=N$ در سامانه ایجاد شود. بدین ترتیب، در شکل‌های ۱ و ۲، تابع احتمال $P_{11}(\mathrm{t})$ را به ازای مقادیر معین $\frac{\omega_a}{\nu}$ و N و برای دو توزیع فوتونی ذکر شده بر حسب زمان مشخصه‌ی $\frac{t}{T}$ رسم کرده‌ایم.



شکل ۱: احتمال $P_{11}(\mathrm{t})$ برحسب $\frac{t}{T}$ برای توزیع فوتونی متناظر با حالت همدوس استاندارد و به ازای مقادیر $\frac{\omega_a}{\nu}=2$ و $N=25$.



شکل ۲: احتمال $P_{11}(\mathrm{t})$ برحسب $\frac{t}{T}$ برای توزیع فوتونی متناظر با حالت گرمایی و به ازای مقادیر $\frac{\omega_a}{\nu}=2$ و $N=25$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به ازای مقادیر معین $\frac{\omega_a}{\nu}$ و N، شرط تشدید را برای سامانه‌ی در نظر گرفته شده به‌دست آوردیم و بدین گونه برانگیختگی‌های اتم-میدان در یک مسیر قابل کنترل قرار گرفتند. به‌علاوه، تحت این شرایط یک مقدار بهینه برای جفت‌شدگی مؤثر بین ترازهای اتمی و میدان حاصل شد که به ازای آن احتمال $P_{11}(\mathrm{t})$ در تناوب‌های معین به بیشینه مقدار خود، یعنی ۱ می‌رسد. نمودارهای ارائه شده در شکل‌های ۱ و ۲، نشان‌دهنده‌ی وقوع پدیده‌ی احیا به‌صورت متناوب و کامل هستند و با محاسبات تحلیلی ما کاملاً سازگارند. همچنین نتایج حاصل از نمودارها بر این واقعیت اذعان دارند که به ازای ثابت جفت‌شدگی بهینه، رفتار تناوبی احتمال $P_{11}(\mathrm{t})$ مستقل از توزیع فوتونی میدان در آغاز برهم‌کنش است. البته رفتار تناوبی مذکور، در ویژگی‌های غیرکلاسیکی دیگر از جمله آمار فوتونی میدان و آنتروپی اتم و میدان نیز به چشم می خورد که به علت کمبود جا از ارائه آن‌ها معذوریم.

مراجع

[1] Jaynes E. T. & Cummings F. W. , **Proc. IEEE**. 51 (1963) 89.

[2] Klimov A. B. & Chumakov S. M. "A Group-Theoretical approach to *Quantum Optics*" WILY-VCH (2009).

[3] Sivakumar S. , **Int. J. Theor. Phys.** 43 (2004) 2405.

[4] Cordero S & Recamier J. , **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.** 44 (2011) 135502.