بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

# تأثیر پارامتر نامیزانی بر درهم‌تنیدگی بین دو اتم سه‌ترازی نوع $\Lambda$ و یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدّت

باغشاهی حمیدرضا [۱]، توسّلی محمّد کاظم [۱] و اخترشناس سیّد جواد [۲]

[۱]گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

[۲]گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

**چکیده - در این مقاله برهم‌کنش بین دو اتم سه‌ترازی نوع $\Lambda$ و یک میدان تک‌مد همدوس با جفت‌شدگی وابسته به شدت را در نظر گرفته‌ایم. بعد از یافتن تابع موج صریح اتم-میدان، درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان با استفاده از معیار تلاقی بررسی می‌شود. همچنین تأثیر پارامتر نامیزانی و میانگین اولیّه تعداد فوتون‌های میدان بر روی درهم‌تنیدگی مورد بحث قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهند که درهم‌تنیدگی اتم‌ها و میدان می‌تواند توسط این دو کمیّت کنترل شود.**

کلید واژه- پارامتر نامیزانی- درهم‌تنیدگی- جفت‌شدگی وابسته به شدت- تلاقی- مدل جینز-کامینگز.

کد PACS–اپتیک کوانتومی، ۲۷۰/۰۲۷۰.

# The Effect of Detuning Parameter on the Entanglement between Two $\Lambda$–Type Three-Level Atoms with a Single-Mode Cavity Field via Intensity-Dependent Coupling

Baghshahi Hamid Reza [۱], Tavassoly Mohammad Kazem [۱]and Akhtarshenas Seyed Javad [۲]

[۱]Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

[۲]Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad

Abstract- In this paper we consider the interaction between two $\Lambda$-type three–level atoms and a single-mode coherent cavity field with intensity-dependent coupling. After obtaining the explicit form of the atom-field state vector, the entanglement between the two atoms and the applied field is examined by using the concurrence measure. Also, the effects of the detuning parameter as well as initial mean photon number on the entanglement are discussed. The results show that, the atom-field entanglement can be sensitively controlled via these parameters.

Keywords: Detuning parameter, Entanglement, Intensity-dependent coupling, Concurrence, Jaynes-Cummings model.

PACS No: Quantum Optics (۲۷۰,۰۲۷۰)



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-01 ]

## ۱- مقدمه

بررسی برهم‌کنش اتم و میدان با استفاده از رهیافت کوانتومی، ویژگی‌های جدیدی از ماهیّت کوانتومی اتم و میدان را به نمایش می‌گذارد. پایه و اساس این رهیافت در بیشتر موارد مدل ساده، قابل حل و تعمیم‌پذیر جینز-کامینگز است [۱]. همان‌طور که ذکر شد یکی از ویژگی‌های ممتاز مدل جینز-کامینگز تعمیم‌پذیری آسان این مدل است. در سال‌های اخیر برای این مدل تعمیم‌های مختلفی از جمله جفت‌شدگی وابسته به شدّت [۲]، جایگزینی چند اتم به جای یک اتم [۳]، چند میدان به جای یک میدان [۴]، اتم چندترازی به جای اتم دوترازی [۵ و ۶] و ... در نظر گرفته شده است. به عنوان مثال برهم‌کنش انواع مختلف اتم‌های سه‌ترازی با توجه به خواص غیرکلاسیکی‌شان که باعث کاربرد آنها در پدیده‌های کوانتومی از قبیل شفافیّت الکترومغناطیسی و لیزر بدون وارونی جمعیّت شده است به شدّت مورد توجّه بوده است [۷]. از سوی دیگر یکی از کاربردهای مهم مدل جینز-کامینگز ایجاد حالت‌های درهم‌تنیده است. با توجّه به اهمیّت حالت‌های درهم‌تنیده در پردازش اطّلاعات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ... این حالت‌ها به شدّت مورد توجه محقّقین قرار گرفته‌اند [۸] . در این مقاله برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع $\Lambda$ با یک میدان تک‌مد وابسته به شدّت را با در نظر گرفتن پارامتر نامیزانی مورد بررسی قرار می‌دهیم. علیرغم پیچیدگی سامانه، حتّی در حضور پارامتر نامیزانی (که در کارهای قبل در نظر گرفته نشده است [۹]) شکل صریح تابع موج اتم-میدان محاسبه و با استفاده از آن درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را با استفاده از معیار تلاقی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به ویژه تأثیر پارامتر نامیزانی و میانگین تعداد فوتون‌های اولیّه میدان بر روی این معیار بررسی می‌شود.

## ۲- توصیف مدل

هامیلتونی برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع $\Lambda$ با ترازهای $|1\rangle$، $|2\rangle$ و $|3\rangle$ و بسامدهای اتمی $\omega_1$، $\omega_2$ و $\omega_3$ ($\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$) با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدّت در تصویر برهم‌کنش را به صورت زیر توصیف می‌کنیم:

$$\hat{H}_I = g_1 \sum_{m=1}^{2} (\sigma_{12}^{(m)} \hat{A} e^{i\Delta_1 t} + \sigma_{21}^{(m)} \hat{A}^\dagger e^{-i\Delta_1 t}) + g_2 \sum_{m=1}^{2} (\sigma_{13}^{(m)} \hat{A} e^{i\Delta_2 t} + \sigma_{31}^{(m)} \hat{A}^\dagger e^{i\Delta_2 t}) \quad (۱)$$

به طوری که $\hat{\sigma}_{ik} = |i\rangle\langle k|$ عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده اتمی، $g_1$ و $g_2$ ثابت‌های جفت‌شدگی اتم و میدان، اندیس $m$ شمارنده‌ی اتم‌های ۱ و ۲ و $\hat{A} = \hat{a} f(\hat{n})$ و $\hat{A}^\dagger = f(\hat{n})\hat{a}^\dagger$ عملگرهای نابودی و آفرینش تغییر شکل‌یافته‌ی $f$ هستند به طوری که $f(\hat{n})$ یک تابع عملگر-مقدار وابسته به شدت است. همچنین $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_2 - \Omega$ و $\Delta_2 = \omega_1 - \omega_3 - \Omega$ پارامترهای نامیزانی بین دو گذار اتمی و بسامد میدان ($\Omega$) هستند. با توجه به اینکه اطّلاعات هر سامانه در تابع موج آن نهفته است، بنابراین در این قسمت با استفاده از هامیلتونی بالا و در نظر گرفتن تابع موجی به شکل:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [ & C_1(n,t)|1,1,n\rangle + C_2(n,t)(|1,2,n+1\rangle + |2,1,n+1\rangle) \\ & + C_3(n,t)(|1,3,n+1\rangle + |3,1,n+1\rangle) \\ & + C_4(n,t)(|2,3,n+2\rangle + |3,2,n+2\rangle) \\ & + C_5(n,t)|2,2,n+2\rangle + C_6(n,t)|3,3,n+2\rangle ] \end{aligned} \quad (۲)$$

ضرایب بسط تابع موج را با استفاده از حل معادله شرودینگر وابسته به زمان به دست می‌آوریم. برای رسیدن به این هدف شرایط اولیه اتم‌ها و میدان مورد نیاز است، به همین منظور حالت اولیّه میدان را حالت همدوس و حالت اولیّه اتم‌ها را حالت برانگیخته‌اشان در نظر می‌گیریم.

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_n C_1(n,0)|1,1,n\rangle$$
$$C_1(n,0) = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (۳)$$

به منظور ساده‌شدن مسأله $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ در نظر گرفته و بدون کاسته‌شدن از کلیّت آن فرض می‌کنیم $g_1 = g_2 = g$. با در نظر گرفتن این شرایط پس از انجام محاسبات طولانی ضرایب بسط تابع موج با استفاده از روش تبدیل لاپلاس به صورت زیر به دست می‌آیند:

(۴)



[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-01 ]

$$C_1(n,t)=C_1(n,0)\sum_{j=1}^{3}b_j e^{\mu_j t}(-2\Delta^2+4V_2^2+\mu_j(\mu_j-3i\Delta))$$

$$C_2(n+1,t)=C_3(n+1,t)=-V_1C_1(n,0)\sum_{j=1}^{3}b_j e^{\mu_j t}(i\mu_j+2\Delta)$$

$$C_4(n+2,t)=C_5(n+2,t)=C_6(n+2,t)=$$
$$-2V_1V_2C_1(n,0)\sum_{j=1}^{3}b_j e^{\mu_j t}$$

که در آن‌ها $V_1=g\,f(n+1)\sqrt{n+1}$، $V_2=g\,f(n+2)\sqrt{n+2}$ و $\mu_j$ها ریشه‌های معادله درجه سوم $\mu^3+x_1\mu^2+x_2\mu+x_3=0$ با $x_1=-3i\Delta$، $x_2=4(\Delta^2-V_1^2-V_2^2)$ و $x_3=-8i\Delta V_1^2$ هستند که با استفاده از دستور کاردان به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mu_j=-\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}\sqrt{x_1^2-3x_2}\cos\left[\theta+\frac{2}{3}(j-1)\pi\right],\quad j=1,2,3$$
$$\theta=\frac{1}{3}\cos^{-1}\left[\frac{9x_1x_2-2x_1^3-27x_3}{2(x_1^2-3x_2)^{3/2}}\right] \qquad (۵)$$

همچنین $b_j$ها در (۴) به شکل زیر تعریف شده‌اند:

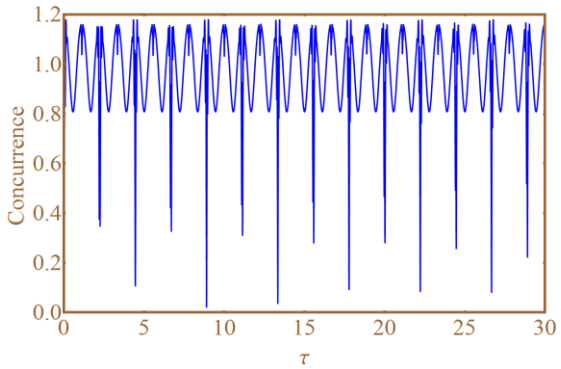
$$b_j=\frac{1}{\mu_{jk}\mu_{jl}},\quad j\neq k\neq l=1,2,3$$
$$\mu_{jk}=\mu_j-\mu_k \qquad (۶)$$

## ۳- در هم‌تنیدگی

با داشتن تابع موج سامانه می‌توان به بررسی خواص غیرکلاسیکی آن پرداخت. در اینجا با توجه به اهمیّت درهم‌تنیدگی کوانتومی، به بررسی درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان می‌پردازیم. برای تعیین درجه درهم‌تنیدگی معیارهای مختلفی از جمله آنتروپی فون-نویمن، آنتروپی خطی، منفیّت، تلاقی و ... وجود دارد که با توجه به ابعاد زیرسامانه‌ها، خالص یا آمیخته‌بودن حالت مربوط به دو زیرسامانه و ... می‌توان از این‌ها استفاده نمود [۱۰]. امّا برای محاسبه درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها و میدان در سامانه مورد بحث، با توجه به خالص‌بودن حالت سامانه و همچنین حالت اولیه آن معیارهای متفاوتی قابل استفاده هستند؛ امّا معیار مورد استفاده در این مقاله تلاقی تعمیم یافته است. در صورتی که دو زیرسامانه $A$ و $B$ را به ترتیب با ابعاد $D$ و $D'$ ($D\le D'$) در نظر بگیریم و با یک سامانه خالص شامل این دو زیر سامانه سر و کار داشته باشیم، تلاقی تعمیم‌یافته به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$C_{AB}=\sqrt{2(1-tr\rho_A^2)} \qquad (۷)$$

که در آن $\rho_A$ ماتریس چگالی کاهش‌یافته مربوط به زیرسامانه $A$ است که با گرفتن رد از ماتریس چگالی کلّ سامانه، $\rho_{AB}$، روی مؤلّفه‌های زیر سامانه $B$ به دست می‌آید. کران بالای تلاقی تعمیم‌یافته برای سامانه‌های خالص برابر است با $\sqrt{2(D-1)/D}$. بنابراین در اینجا با توجّه به این‌که بررسی درهم‌تنیدگی بین دو اتم سه ترازی ($D=6$) و میدان ($D'=\infty$) مورد نظر است کران بالای درهم‌تنیدگی تقریباً برابر 1.3 است.



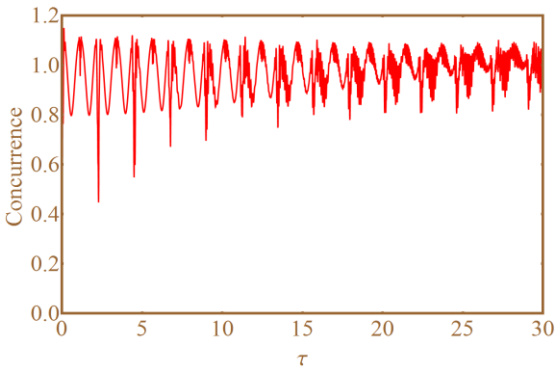

شکل ۱: معیار تلاقی بر حسب پارامتر بدون بعد $\tau=gt$ به ازای $|\alpha|^2=25$، $f(n)=\sqrt{n}$ و $\Delta=0$.

شکل ۱ در هم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را برای حالتی که تعداد متوسّط اولیّه فوتون‌های میدان برابر ۲۵ باشد را برای تابع غیرخطی $f(n)=\sqrt{n}$ و در غیاب پارامتر نامیزانی نشان می‌دهد. در اینجا لازم به ذکر است که تابع $f(n)=\sqrt{n}$ به طور طبیعی در هامیلتونی‌هایی که توصیف‌کننده برهم‌کنش یک اتم دوترازی با میدان تابشی و با جفت‌شدگی وابسته به‌شدت هستند ظاهر شده است [۱۲ و ۱۳]. با توجّه به این نمودار، مشخّص است که میزان درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها و میدان به صورت منظّم بین مقدار بیشینه و کمینه نوسان می‌کند. شکل ۲ به‌منظور بررسی تأثیر پارامتر نامیزانی بر درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها و میدان رسم شده است. با توجّه به این نمودار پیداست که پارامتر نامیزانی اثر مثبتی بر درهم‌تنیدگی دو اتم و میدان دارد. در حضور این نامیزانی، پارامتر تلاقی بین نقاط بیشینه و کمینه با دامنه کمتری نوسان می‌کند.

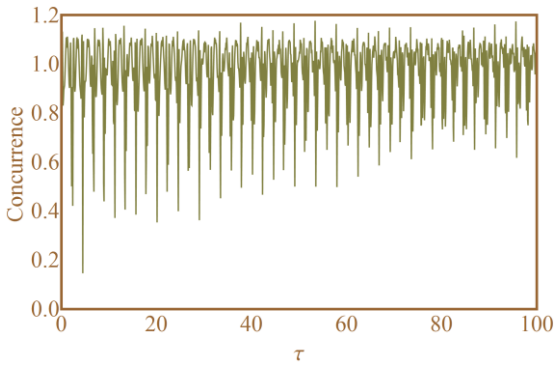


[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-01 ]

به عبارت دیگر هرچند در حضور پارامتر نامیزانی مقدار بیشینه درهم‌تنیدگی تا حدّی کم می‌شود ولی با گذشت زمان دامنه این افت و خیزها کاهش‌یافته و درهم‌تنیدگی در حوالی مقدار بیشینه بیشتر تثبیت می‌شود.




شکل ۲: معیار تلاقی بر حسب پارامتر بدون بعد $\tau = gt$ با پارامترهای مشابه شکل ۱ ولی با $\Delta = 15$.




شکل ۳: معیار تلاقی بر حسب پارامتر بدون بعد $\tau = gt$ با پارامترهای مشابه شکل ۱ ولی با $|\alpha|^2 = 4$.

در شکل ۳ تأثیر میانگین تعداد اولیّه تعداد فوتون‌های میدان بر درهم‌تنیدگی اتم‌ها و میدان بررسی شده است، نمودار نشان می‌دهد که کاهش مقدار میانگین تعداد فوتون‌ها از ۲۵ به ۴ باعث افزایش مقادیر کمینهٔ تلاقی در طول زمان می‌شود. هرچند دیگر شاهد نوسان‌های منظّم این کمّیت در مقایسه با شکل ۱ نیستیم.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع $\Lambda$ با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدّت را در حضور پارامترهای نامیزانی مورد بررسی قرار دادیم. با حل معادله شرودینگر وابسته به زمان و استفاده از تبدیل لاپلاس علیرغم پیچیدگی مسأله، تابع موج صریح سامانه به صورت تحلیلی به دست آمد. با استفاده از تابع موج به دست آمده درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را با استفاده از معیار تلاقی تعمیم‌یافته و با انتخاب یک تابع غیرخطی شناخته شده به‌صورت $f(n) = \sqrt{n}$ به دست آوردیم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که با تنظیم اختلاف بسامد بین میدان و گذارهای اتمی ($\Delta$ها) و متوسّط تعداد اولیّه فوتون‌های میدان ($|\alpha|^2$) می‌توان میزان درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را کنترل کرد. بدیهی است که رهیافت ارائه شده قابل کاربرد برای هر تابع غیرخطی دلخواهی است و واضح است که با تغییر جفت‌شدگی وابسته به شدّت می‌توان به رفتارهای متفاوتی از درهم‌تنیدگی دست یافت. همچنین محاسبه و ارزیابی سایر کمّیت‌های غیرکلاسیکی مانند چلاندگی، آمار زیرپواسونی و ... نیز به سهولت ممکن است که در این مختصر نمی‌گنجد.

## مراجع


[۱] E.T. Jaynes, F. W. Cummings, **Proc. IEEE.** ۵۱ (۱۹۶۳) ۸۹.

[۲] B. Buck and C. V. Sukumar, ۱۹۸۱ **Phys. Lett**. A ۸۱ (۱۹۸۱) ۱۳۲.

[۳] S. Bougoua, Z. Ficek Z **Phys. Rev. A** ۸۸ (۲۰۱۳) ۰۲۲۳۱۷

[٤] M. J. Faghihi, M. K. Tavassoly, **J. Opt. Soc. Am. B** ۳۰ (۲۰۱۳) ۲۸۱۰.

[٥] H. R. Baghshahi, M. K. Tavassoly, **Phys. Scr**. ۸۹ (۲۰۰۱) ۰۷۵۱۰۱.

[٦] M. J. Faghihi, M. K. Tavassoly, **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys**. ٤٦ (۲۰۱۳) ۱٤٥٥٠٦

[۷] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* , Cambridge: Cambridge University Press (۱۹۹۷)

[۸] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, England, ۲۰۰۰.

[۹] حمیدرضا باغشاهی، محمّد کاظم توسلی، عبّاس بهجت، چلاندگی و آمار کوانتومی در برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع $\Xi$ با یک میدان تک‌مد، بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران، دانشگاه صنعتی شیراز، ۳ تا ۵ بهمن، دانشگاه صنعتی شیراز.

[۱۰] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki **Rev. Mod. Phys**. ۸۱ (۲۰۰۹) ۸٦٥

[۱۱] P. Rungta, V. Buzek, CM. Caves, M. Hillery, G. J. Milburn, **Phys. Rev. A.** ٦٤ (۲۰۰۱) ۰٤۲۳۱٥.

[۱۲] S. Singh**, Phys. Rev. A** ۲٥ (۱۹۸۲) ۳۲۰٥.

[۱۳] J. M. Fink, M. Goppl, M. Baur, R. Bianchetti, P. J. Leek, A. Blais, A. Wallraff, **Nature** ٤٥٤ (۲۰۰۸) ۳۱٥.




[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-01 ]