



بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران  
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران  
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی



## کنترل گذار فاز کوانتومی یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین به دام افتاده در داخل یک کاواک اپتیکی

علی دلفی<sup>۱</sup>، محمد حسین نادری<sup>۲</sup>، محمود سلطان‌الکتابی<sup>۲</sup>، و هادی روحبخش<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>مرکز ملی علوم و فنون لیزر ایران، تهران

<sup>۲</sup>گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان

چکیده - در این مقاله به بررسی اثر غیرخطی برخورد های اتمی بر حد آستانه‌ی گذار فاز کوانتومی در سامانه‌ای متشکل از یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین به دام افتاده در داخل یک کاواک اپتیکی که اتم‌های درون کاواک از سمت عمود بر محور آن تحت دمش اپتیکی قرار گرفته‌اند می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که با دست‌کاری شدت اندرکنش اتمی می‌توان نقطه‌ی بحرانی گذار فاز را کنترل کرد.

کلید واژه- چگالیده‌ی بوز-اینشتین، شبکه‌ی اپتیکی، گذار فاز کوانتومی

## Controlling the quantum phase transition of a trapped Bose-Einstein condensate inside an optical cavity

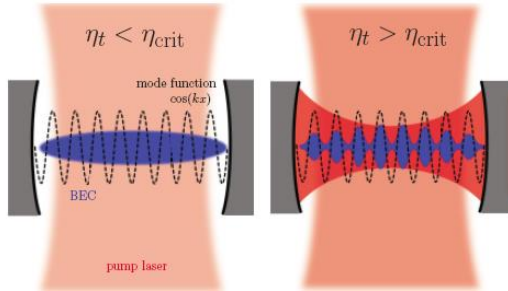
Ali Dalafi<sup>1,2</sup>, Mohammad Hossein Naderi<sup>2</sup>, Mahmood Soltanolkotabi<sup>2</sup>, and Hadi Roohbakhsh<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Iranian National Center of Laser Science and Technology (INLC), Tehran

<sup>2</sup>Quantum Optics Group, Department of Physics, Faculty of Science, University of Isfahan

Abstract- In this paper we investigate the nonlinear effect of atomic collisions on the threshold of quantum phase transition in a system consisting of a Bose-Einstein condensate trapped inside an optical cavity in which the atoms are pumped optically from a direction perpendicular to the cavity axis. We show that by manipulating the atomic interaction strength, one can control the critical point of the phase transition.

Keywords: BEC, optical lattice, quantum phase transition



شکل ۱: گذار فاز کوانتومی یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین از حالت نرمال (سمت چپ) به حالت ابرتابنده (سمت راست) [۳].

چنانچه  $\omega_{\perp} \ll \omega_0$  باشد می‌توان درجه‌ی آزادی حرکت اتم-ها را در راستای محور  $x$  (محور کاواک) در چارچوب فرمولبندی کوانتوم دو با میدان کوانتومی  $\Psi(x)$  و دینامیک سامانه را با هامیلتونی مؤثر یک بعدی زیر توصیف کرد [5]:

$$H = -\hbar\Delta_c a^\dagger a + \int_{-L/2}^{L/2} \Psi^\dagger(x) \left( -\frac{\hbar^2}{2m_a} \frac{d^2}{dx^2} + \hbar U_0 \cos^2(kx) \right) a^\dagger a + \hbar \eta_t \cos(kx) (a^\dagger a) + \frac{1}{2} U_s \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \Psi(x) dx. \quad (1)$$

در اینجا  $a$  عملگر نابودی میدان اپتیکی درون کاواک،  $\Delta_c = \omega_p - \omega_c$  (بسامد بازآوایی کاواک)،  $U_0 = g_0^2 / \Delta_a$  (بسامد رابی خلأ) و  $U_s = 4\pi\hbar^2 a_s / m_a w^2$  است که در آن،  $a_s$  طول پراکندگی در برهم‌کنش اتم-اتم [۶، ۷] و  $w$  اندازه‌ی کمر پتانسیل اپتیکی است. هم‌چنین  $k = \omega_c / c$  عدد موج میدان اپتیکی درون کاواک است.

در رژیم برهم‌کنش ضعیف، یعنی  $U_0 \langle a^\dagger a \rangle \leq 10\omega_R$  که در آن،  $\omega_R = \hbar k^2 / 2m_0$  بسامد پس‌زنی اتمی است، می‌توان میدان اتمی را به دو مد متقارن کناری با تکانه‌های  $\pm \hbar k$  محدود کرد که در اثر اندرکنش اتم-فوتون برانگیخته می‌شوند [8]. بدین ترتیب با توجه به پایستگی پاریته، میدان کوانتومی اتمی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} c_0 + \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(kx) c, \quad (2)$$

که در آن،  $c_0$  عملگر نابودی مد چگالیده (با تکانه‌ی صفر) و  $c_1$  عملگر نابودی مد بوگولیوبوف (با تکانه‌ی  $k$ ) است. با

## ۱- مقدمه

پدیده‌ی چگالش اتم‌های بوزونی برای نخستین بار توسط آلبرت اینشتین در سال ۱۹۲۶ به طور نظری پیش‌بینی شد ولی تحقق تجربی آن نزدیک به ۷۰ سال بعد یعنی در سال ۱۹۹۵ میسر شد [۱]. چگالش بوز-اینشتین نوعی گذار فاز نوع دوم است که در گازی متشکل از بوزون‌های یکسان روی می‌دهد [2]. گذار فاز کوانتومی از حالت نرمال به حالت ابرتابنده [3]، در سامانه‌ای متشکل از یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین به دام افتاده در داخل یک کاواک اپتیکی که اتم‌های درون کاواک از سمت عمود بر محور آن تحت دمش اپتیکی قرار گرفته‌اند، قابل مشاهده است (شکل ۱). چنانچه شدت تابش عرضی کمتر از مقدار بحرانی  $\eta_{crit}$  باشد، متوسط تعداد فوتون‌های درون کاواک صفر و توزیع اتم‌ها در طول کاواک یکنواخت است که چنین وضعیتی را فاز نرمال می‌نامند. از طرف دیگر، چنانچه شدت تابش عرضی بزرگتر از حد بحرانی شود، متوسط تعداد فوتون‌های درون کاواک شروع به افزایش کرده و اتم‌ها توزیعی تناوبی پیدا می‌کنند که به فاز ابرتابنده معروف است.

در این مقاله قصد داریم اثر غیرخطی برخورد‌های اتمی را بر حد آستانه‌ی گذار فاز کوانتومی بررسی کنیم. نشان خواهیم داد که افزایش شدت برخورد‌های اتمی موجب جابجایی نقطه‌ی بحرانی به سمت شدت‌های عرضی بالاتر می‌شود.

## ۲- هامیلتونی و دینامیک سامانه

یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین متشکل از تعداد  $N$  اتم دو ترازوی را در داخل یک کاواک اپتیکی با طول  $L$  در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که اتم‌ها از سمت کناری کاواک به وسیله‌ی یک لیزر با بسامد  $\omega_p$  و با آهنگ  $\eta_t$  دمیده می‌شوند (شکل ۱). فرض می‌کنیم که چگالیده در داخل یک دام متقارن استوانه‌ای با بسامد عرضی  $\omega_{\perp}$  و بسامد طولی  $\omega_0$  محبوس شده است. در رژیم پاشنده، که  $\Delta_a = \omega_p - \omega_a$  بسیار بزرگتر از پهنا‌ی خط اتمی  $\gamma$  است ( $\omega_a$ ، بسامد گذار اتمی است)، حالت برانگیخته‌ی الکترونی اتم را می‌توان به طور آدیاباتیک حذف و از اثر گسیل خود به خود اتم‌ها صرف نظر کرد [4].

قرار دادن معادله‌ی (۲) در معادله‌ی (۱) هامیلتونی سامانه به صورت زیر در می‌آید:

(۳)

$$H = -\hbar\Delta_c a^\dagger a + \hbar\omega_R c_1^\dagger c_1 + \frac{1}{2}\hbar U_0 a^\dagger a (c_0^\dagger c_0 + \frac{3}{2}c_1^\dagger c_1) + \frac{\hbar\omega_{sw}}{4N} (c_0^{\dagger 2} c_0^2 + c_1^{\dagger 2} c_0^2 + 4c_0^\dagger c_0 c_1^\dagger c_1 + \frac{3}{2}c_1^{\dagger 2} c_1^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\eta_l (a^\dagger + a)(c_1^\dagger c_0 + c_0^\dagger c_1),$$

که در آن،  $\omega_{sw} = 8\pi\hbar a_s N / m_0 L w^2$  بسامد پراکندگی در برهم‌کنش میان اتم‌هاست. اکنون می‌توان معادلات حرکت هایزنبرگ را برای مدهای اپتیکی و اتمی با استفاده از هامیلتونی  $H - \mu\hat{N}$  در چارچوب صورتبندی هنگرد (آنسامبل) کانونیک بزرگ به دست آورد [۳] که در اینجا  $\mu$  پتانسیل شیمیایی و  $\hat{N} = c_0^\dagger c_0 + c_1^\dagger c_1$  عملگر تعداد ذرات اتمی است:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= i\Delta_c a - \frac{i}{2}U_0 a (c_0^\dagger c_0 + \frac{3}{2}c_1^\dagger c_1) - \frac{i}{\sqrt{2}}\eta_l (c_1^\dagger c_0 + c_0^\dagger c_1) - \kappa a + \xi(t), \\ \dot{c}_0 &= i(\frac{1}{\hbar}\mu - \frac{1}{2}U_0 a^\dagger a)c_0 - \frac{i}{\sqrt{2}}\eta_l (a^\dagger + a)c_1 - \frac{i}{2N}\omega_{sw} (c_0^\dagger c_0^2 + c_0^\dagger c_1^2 + 2c_0 c_1^\dagger c_1) \\ \dot{c}_1 &= i(\frac{1}{\hbar}\mu - \omega_R - \frac{3}{4}U_0 a^\dagger a)c_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\eta_l (a^\dagger + a)c_0 - \frac{i}{2N}\omega_{sw} (c_1^\dagger c_0^2 + 2c_0^\dagger c_0 c_1 + \frac{3}{2}c_1^\dagger c_1^2) \end{aligned} \quad (۴)$$

در نخستین معادله از معادلات (۴) ضریب اتلاف میدان اپتیکی درون کاواک، و  $\xi(t)$  عملگر نوفه‌ی ناشی از افت و خیزهای خلأ کوانتومی است که توابع همبستگی آن در روابط مارکوفی  $\langle \xi^\dagger(t)\xi(t') \rangle = (n_{ph} + 1)\delta(t - t')$  و  $\langle \xi^\dagger(t)\xi^\dagger(t') \rangle = n_{ph}\delta(t - t')$  صدق می‌کنند که  $n_{ph}$  متوسط تعداد فوتون‌های گرمایی است که در بسامدهای اپتیکی تقریباً برابر صفر است. از آنجایی که در این مقاله می‌خواهیم صرفاً به بررسی اثر گذار فار کوانتومی بر روی مقادیر میانگین میدان‌ها بپردازیم از افت و خیزهای کوانتومی صرف نظر می‌کنیم. با جایگزینی عملگرهای کوانتومی با مقادیر میانگین  $\langle a \rangle = \sqrt{N}\alpha$  و  $\langle c_1 \rangle = \sqrt{N}\beta_1$  و  $\langle c_0 \rangle = \sqrt{N}\beta_0$  در معادلات (۴) به معادلات زیر برای مقادیر میدان میانگین در شرایط پایا دست می‌یابیم:

$$\begin{aligned} [i(\delta_c - u\beta_1^2) - \kappa]\alpha &= iy\beta_0\beta_1 \\ \mathbf{M}(\alpha, \beta)\boldsymbol{\beta} &= \frac{1}{\hbar}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (۵)$$

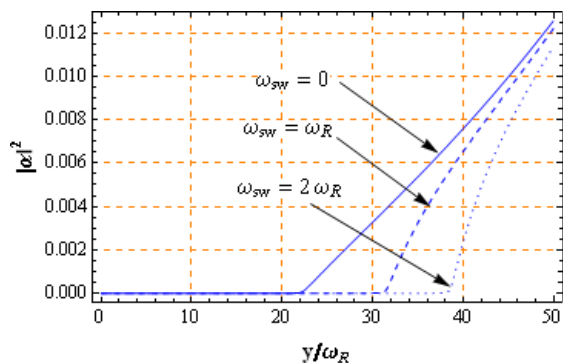
که در آن،  $u = \frac{1}{4}NU_0$  و  $y = \sqrt{2N}\eta_l$  دو پارامتر، و  $\delta_c = \Delta_c - \frac{1}{2}NU_0$  یک بردار ستونی و  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)^T$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2u|\alpha|^2 + w_1 & y\alpha_R \\ y\alpha_R & \omega_R + 3u|\alpha|^2 + w_2 \end{pmatrix} \quad (۶)$$

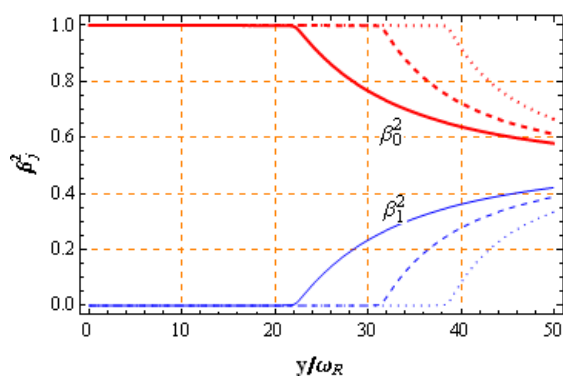
یک ماتریس است که در آن،  $w_1 = \frac{1}{2}\omega_{sw}(1 + 2\beta_1^2)$  و  $w_2 = \frac{3}{2}\omega_{sw}(1 - 2\beta_1^2)$  و  $\alpha_R$  قسمت حقیقی عدد مختلط  $\alpha$  است.

### ۳- حل عددی به روش خودسازگار

دومین معادله از معادلات (۵) یک معادله‌ی ویژه مقدار غیرخطی است که در آن،  $\mu/\hbar$  کوچکترین ویژه مقدار ماتریس  $\mathbf{M}$  و  $\boldsymbol{\beta}$  ویژه بردار متناظر با آن است. دو نوع غیرخطیت در این مسأله‌ی ویژه مقداری وجود دارد: اولین غیرخطیت از وابستگی غیرمستقیم ماتریس  $\mathbf{M}$  به  $\boldsymbol{\beta}$  از طریق  $\alpha$  ناشی می‌شود که خود، از طریق معادله‌ی اول به  $\boldsymbol{\beta}$  بستگی پیدا می‌کند. دومین غیرخطیت ناشی از وابستگی مستقیم  $\mathbf{M}$  به  $\boldsymbol{\beta}$  از طریق پارامترهای  $w_1$  و  $w_2$  است که در اثر برخوردهای اتمی به وجود می‌آید. معادلات (۵) را می‌توان با استفاده از روش عددی خودسازگار حل کرد. بدین منظور، ابتدا مقادیر دلخواهی برای  $\alpha_R, \alpha_I$  و  $\beta_1$  اختیار می‌کنیم و کوچکترین ویژه مقدار ماتریس  $\mathbf{M}$  و ویژه بردار متناظر با آن را به دست می‌آوریم. سپس، مقادیر به دست آمده برای  $\beta_0$  و  $\beta_1$  را در اولین معادله‌ی (۵) قرار می‌دهیم و مقادیر جدیدی برای  $\alpha_R, \alpha_I$  به دست می‌آوریم. اگر اختلاف بین مقادیر اولیه و نهایی  $\alpha_R$  بزرگتر از مقدار معین  $\varepsilon$  باشد، این فرایند را آن قدر تکرار می‌کنیم تا این که اختلاف ذکر شده کمتر از  $\varepsilon$  شود. هنگامی که این شرط برقرار شود، فرایند تکرار را قطع می‌کنیم و آخرین مقادیر حاصل را به عنوان جواب‌های خودسازگار معادلات غیرخطی (۵) در نظر می‌گیریم. نتایج حاصل از حل عددی معادلات (۵) به روش خودسازگار به ازای  $\varepsilon = 10^{-4}$  در شکل‌های ۳ و ۲ نمایش داده شده است. در شکل ۲ متوسط تعداد فوتون‌های درون کاواک، و در شکل ۳ متوسط تعداد نسبی اتم‌های موجود در مد چگالیده ( $c_0$ ) و مد بوگولیوبوف ( $c_1$ ) بر حسب شدت دمش عرضی بهنجار شده ( $y/\omega_R$ ) به ازای سه مقدار مختلف بسامد برخورد اتمی نشان داده شده‌اند. همان‌طور که از این شکل‌ها دیده می‌شود، یک نقطه‌ی بحرانی (حد آستانه)  $y_c$  وجود دارد به گونه‌ای که اگر شدت دمش عرضی کمتر از آن باشد ( $y < y_c$ )، متوسط تعداد فوتون‌های داخل کاواک صفر است و تمام اتم‌ها در



شکل ۲: متوسط تعداد فوتون‌های کاواک تقسیم بر  $\sqrt{N}$  بر حسب شدت دمش عرضی  $y/\omega_R$  به ازای سه مقدار مختلف بسامد برخورد اتمی و مقادیر  $\delta_c = -100\omega_R, u = -20\omega_R, \kappa = 200\omega_R$



شکل ۳: متوسط تعداد نسبی اتم‌های موجود در مد چگالیده،  $\beta_0^2$  (منحنی‌های ضخیم)، و مد بوگولیوبوف،  $\beta_1^2$  (منحنی‌های نازک)، بر حسب شدت دمش عرضی به ازای سه مقدار مختلف بسامد برخورد اتمی. مقادیر سایر پارامترها مانند شکل ۱ است.

که با یکی از مدهای اپتیکی درون کاواک که از طریق تابش عرضی برانگیخته می‌شود برهم‌کنش می‌کند. نشان دادیم که افزایش شدت برخوردهای اتمی موجب جابجایی نقطه‌ی بحرانی به سمت شدت‌های عرضی بالاتر می‌شود.

## مراجع

- [1] K. B. David et.al, *Phy. Rev. Lett.* **75**, 3968 (1995).
- [2] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [3] G. Konya, G. Szirmai, and P. Domokos, *Eur. Phys. J. D* **65**, 33 (2011).
- [4] C. Maschler and H. Ritsch, *Opt. Commun.* **243**, 145 (2004).
- [5] A. Dalafi, M. H. Naderi, M. Soltanolkotabi, and Sh. Barzanjeh, *Phys. Rev. A* **87**, 013417 (2013).
- [6] P. Domokos and H. Ritsch, *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 1098 (2003).
- [7] C. Maschler and H. Ritsch, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 260401 (2005).
- [8] D. Nagy, P. Domokos, A. Vukics, and H. Ritsch, *Eur. Phys. J. D* **55**, 659 (2009).

مد چگالیده انباشته می‌شوند ( $\beta_0 = 1, \beta_1 = 0$ ). در چنین وضعیتی اتم‌ها دارای توزیع یکنواختی در سرتاسر طول کاواک هستند زیرا تابع موج ماکروسکوپی یک اتم‌ها، یعنی  $\psi(x) = \langle \Psi(x) \rangle$  بنا بر معادله‌ی (۲) برابر است با

$$\psi(x) = \sqrt{N/L}, \quad (7)$$

که چنین حالتی را فاز نرمال می‌نامند (شکل ۱، سمت چپ). از طرف دیگر، بالاتر از نقطه‌ی بحرانی ( $y > y_c$ )، متوسط تعداد فوتون‌های درون کاواک با افزایش شدت تابش عرضی شروع به افزایش می‌کند و در عین حال تعدادی از اتم‌های موجود در مد چگالیده به مد بوگولیوبوف برانگیخته می‌شوند. در چنین وضعیتی تابع موج ماکروسکوپی اتم‌ها فاقد توزیع یکنواخت است و به صورت تابع تناوبی

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{N}{L}}\beta_0 + \sqrt{\frac{N}{L}}\beta_1 \cos(kx), \quad (8)$$

خواهد بود که آن را فاز ابرتابنده می‌نامند (شکل ۱، سمت راست). نتیجه‌ی مهمی که از شکل‌های ۲ و ۳ حاصل می‌شود این است که حد آستانه‌ی  $y_c$  به بسامد برخوردهای اتمی وابسته است و با افزایش بسامد پراکندگی  $\omega_{sw}$  به سمت شدت‌های بالاتر جابجا می‌شود. به عنوان مثال، در غیاب اندرکنش اتمی  $y_c \approx 22\omega_R$  است (منحنی‌های پیوسته)، در حالی که به ازای  $\omega_{sw} = \omega_R$  نقطه‌ی بحرانی در  $y_c \approx 32\omega_R$  (منحنی‌های خط‌چین) و به ازای  $\omega_{sw} = 2\omega_R$  در  $y_c \approx 38\omega_R$  روی می‌دهد (منحنی‌های نقطه‌چین). بدین ترتیب از  $\omega_{sw}$  می‌توان به عنوان عاملی برای کنترل آستانه‌ی گذار فاز کوانتومی استفاده کرد. این پارامتر از طریق  $\omega_{\perp}$  (بسامد دام عرضی) به طور تجربی قابل کنترل است.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی اثر غیرخطی برخوردهای اتمی بر حد آستانه‌ی گذار فاز کوانتومی در سامانه‌ای متشکل از یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین به دام افتاده در داخل یک کاواک اپتیکی که اتم‌های درون کاواک از سمت عمود بر محور آن تحت دمش اپتیکی قرار می‌گیرند پرداختیم.