



بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران  
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران  
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی



## تطبیق حل عددی معادلات نرخ جفت شده در محاسبه مشخصات تپ کلید زنی Q در لیزر Nd:YAG دمش دیودی با نتایج تجربی

عباس ملکی<sup>۱</sup>، مسعود کاوش تهرانی<sup>۱</sup>، امین حسینی<sup>۲</sup>، و سید علی یزدانی<sup>۲</sup>

دانشگاه صنعتی مالک اشتر - پژوهشکده علوم و فناوری اپتیک و لیزر، شاهین شهر، اصفهان<sup>۱</sup>

شرکت صنایع الکترونیک شیراز<sup>۲</sup>

چکیده - در این مقاله با استفاده از روش حل عددی معادلات نرخ جفت شده لیزر، نحوه دستیابی به ویژگی‌های تپ کلید زنی Q شامل انرژی، پهنای زمانی و توان قله تپ ارائه شده است. در این روش از کمیتهای نوسانگر لیزری برپا شده در آزمایشگاه، از قبیل جمعیت وارون الکترونی در تراز بالایی محیط فعال، طول مشدد، ضریب اتلاف مشدد و سایر کمیت‌ها جهت محاسبه پهنای زمانی تپ لیزر استفاده شده است. با این مدل، تپ لیزری با انرژی ۴۵ میلی ژول، پهنای ۶/۷ نانوثانیه و توان پیک ۶/۷ مگاوات در طول موج ۱۰۶۴ نانومتر با اعمال توان پیک دمشی ۲۲۵۰ وات شبیه‌سازی گردید که با نتایج تجربی تطابق خوبی دارد. کلیدواژه: چگالی فوتون، چگالی وارونی جمعیت، حل معادلات جفت شده، روش عددی

### Matching numerical procedure in the solution of the coupled rate equations in calculation of Q-switched pulse specification in diode pumped Nd:YAG -Laser with experimental results

Abbas Maleki<sup>1</sup>, Masoud Kavosh Tehrani<sup>1</sup>, Amin Hosseini<sup>2</sup> and Seyed Ali Yazdani<sup>2</sup>

Optics & Laser Science & Technology Research Center, Malek-ashtar University of Technology, Shahin Shahr, Isfahan<sup>1</sup>

Shiraz Electronics Industries Corporation<sup>2</sup>

Abstract-In this paper, the numerical solution of coupled rate equation of laser is presented to specification of Q-switched pulse such as output energy, pulse width and peak power pulsed are obtained. In this method, some of important parameters of an experimental setup of Nd:YAG laser include population inversion of electrons in the active medium, length of resonator, and loss of resonator and other parameters are used to obtain the laser pulse width. By this model, laser pulse with energy of 45 mJ, 6.7ns pulse width and 6.7 MW peak power at 1064 nm wavelength is simulated. The pumped peak power is 2250 W. Our simulation data is in good agreement with experimental results.

Keywords: photon density, population inversion density, coupled rate equations solving, numerical procedure

Q اولین بار توسط مک‌کلانگ<sup>۱</sup> و همکاران او در دهه ۷۰ استخراج شدند. آنچه در اغلب مقالات بیشتر به چشم می‌خورد استفاده از روش‌های تحلیلی و بعضاً پیچیده عددی برای توصیف اثرات عملکرد کلید زنی در لیزرهای حالت جامد دمش دیودی است.

#### ۱- مقدمه

روش فعال کلید زنی Q با بکارگیری سلول پاکلز برای ایجاد تپ لیزری با پهنای زمانی کوتاه از مرتبه نانوثانیه و با توان قله تپ چند ده مگاوات در لیزرهای تپی Nd:YAG مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱،۲]. معادلات عمومی توصیف‌کننده عملکرد لیزرهای کلید زنی

<sup>۱</sup>-McClung

زنی به شکل یک تپ پراثری از لیزر خارج می‌شود. میزان انرژی ذخیره‌شده طبق رابطه (۶) محاسبه می‌شود:

$$E_{st} = (\eta_T \eta_A \eta_S \eta_Q) E_P \quad (6)$$

کمیت  $E_P$  انرژی دمشی دیود لیزر و برابر با  $PT_P$  است.  $P$  توان قله دمشی دیود لیزر و  $T_P$  پهنای زمانی تپ جریان لیزر دیود را نشان می‌دهد. در رابطه (۶) کمیت  $\eta_T$  بازده انتقال انرژی لیزر دیودها به محیط فعال و  $\eta_A$  بازده جذب دمشی بلور Nd:YAG است.  $\eta_S$  بازده استوکس که نسبت طول موج دمش به طول موج لیزر است.  $\eta_Q$  بازده کوانتومی است که برای لیزر چهار تراز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\eta_Q = \left(1 + \frac{\tau_{32}}{\tau_{31}} + \frac{\tau_{32}}{\tau_{30}}\right)^{-1} \quad (7)$$

$\tau_{ij}$  ها نیز طول عمر گسیل بدون تابش از تراز  $i$  به تراز  $j$  را نشان می‌دهند.

### ۳- حل عددی معادلات نرخ لیزر

معادلات نرخ که برای چگالی جمعیت وارون و چگالی فوتون‌ها مطابق رابطه (۱) نوشته شد، معادلات جفت شده‌ای هستند که می‌توانند به بهترین نحو با استفاده از روش اویلر<sup>۲</sup> که برای حل همزمان دو معادله دیفرانسیل استفاده می‌شود، حل شوند. جهت پیاده‌سازی روش موردنظر، ابتدا برآورد اولیه و شناخت چگالی جمعیت و چگالی فوتون‌های اولیه سیستم موردنیاز هست. با فرض وجود گسیل خودبه‌خودی اولیه در یک زاویه فضایی برابر با یک میلی رادیان، انرژی اولیه در دسترس، برای لیزر دادن مطابق رابطه (۸) قابل محاسبه است [۸ و ۷]:

$$E_0 = E_P N_1 (A l_r) \left( \frac{l_c}{c \tau_f} \right) \left( \frac{d\Omega}{4\pi} \right) \quad (8)$$

در رابطه (۸) کمیت  $E_P$  انرژی اولیه فوتون‌ها  $(hc/\lambda_l)$ ،  $A$  سطح مقطع پرتو در بلور لیزر  $(\pi W_3^2)$  که  $W_3$  اندازه لکه متوسط پرتو در بلور لیزر است،  $\tau_f$  طول عمر فلورسانسی بلور لیزر،  $d\Omega$  زاویه فضایی مخروط گسیل خودبه‌خودی و  $N_1$  وارونگی جمعیت اولیه است. اما چگالی وارونی جمعیت اولیه مطابق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N_1 = \left( \frac{E_{st}}{E_P} \right) V \quad (9)$$

$V$  حجم پرتو دمشی  $(\pi W_P^2 l_r)$  است که  $W_P$  اندازه لکه متوسط مد دمشی در بلور لیزری است. جهت رسیدن به نتایج دقیق و

استفاده از روش حل عددی ساده و بسیار نزدیک به تجربه که در این مقاله معرفی می‌شود جهت بهینه‌سازی عملکرد لیزر و تحلیل فرآیند دینامیکی کلید زنی  $Q$  مفید است [۵-۳].

### ۲- نظریه کلید زنی $Q$

توصیف لیزرهای کلید زنی  $Q$  با حل همزمان دو معادله دیفرانسیل جفت شده بر اساس تغییر زمانی چگالی جمعیت وارون الکترونی و چگالی فوتون‌های درون کاواک لیزر انجام می‌شود. معادلات نرخ لیزر عبارتند از [۶ و ۲]:

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma c \sigma_{eff} N \varphi \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left[ c \sigma_{eff} N \varphi \left( \frac{l_r}{l_c} \right) \right] - \omega_L \varphi$$

در این رابطه  $N$  چگالی جمعیت وارون الکترونی  $(N_2 - N_1)$ ،  $\varphi$  چگالی فوتون‌های درون نوسانگر،  $\sigma_{eff}$  سطح مقطع مؤثر گسیل برانگیختگی بلور Nd:YAG،  $l_r$  طول میله لیزر،  $l_c$  طول مشدد،  $c$  سرعت نور،  $\omega_L$  نرخ اتلاف کل و  $\gamma$  عامل تبهگنی یا عامل کاهش وارونگی است. نرخ اتلاف کل درون مشدد نوری مطابق زیر است [۲]:

$$\omega_L = \omega_0 + \omega(t) \quad (2)$$

$\omega_0$  و  $\omega(t)$  به ترتیب ضریب اتلاف نوسانگر و تلفات کلید زنی  $Q$  را شامل می‌شوند که آنها را معرفی می‌کنیم:

$$\omega_0 = c(\alpha_L + \alpha_M) \quad (3)$$

در اینجا  $\alpha_L = L/2l_c$  ضریب اتلاف پراکندگی و جذب محیط فعال و  $\alpha_M = \ln(1/R)/2l_c$  ضریب اتلاف آینه‌های مشدد را نشان می‌دهد.  $R$  ضریب بازتاب آینه خروجی و  $L$  مجموع تلفات پراکندگی شامل جذب و پراکندگی از آینه‌ها و سطوح کلید زنی  $Q$  را نشان می‌دهند. به‌طور مشابه

$$\omega(t) = c\alpha_Q(t) \quad (4)$$

در این رابطه  $\alpha_Q(t)$  تابعی برحسب زمان است که تلفات کلید زنی  $Q$  الکترواپتیکی را نشان می‌دهد و عبارت است از [۷ و ۶]:

$$\alpha_Q(t) = \frac{\ln \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \pi \exp \left( \frac{-t}{\tau_Q} \right) \right) \right] \right\}}{2l_c} \quad (5)$$

کمیت  $\tau_Q$  زمان افت مشخصه درکلید زنی  $Q$  است. در مدت زمانی که کلید زنی  $Q$  مسیر نوسانگر را مسدود نموده است، انرژی دمشی در تراز بالایی محیط بهره ذخیره می‌شود که در انتهای زمان کلید

<sup>۲</sup>-Euler Method

$$E_Q = \int P(t)dt = \left( \frac{hc}{\lambda_l} \frac{Al_c}{t_r} \right) \ln \left( \frac{1}{R} \right) \int \varphi(t)dt \quad (12)$$

$$= \left( \frac{hc}{\lambda_l} \frac{Al_c}{2l_c} \right) \ln \left( \frac{1}{R} \right) \sum \varphi_i \delta t$$

$t_r$  زمان رفت برگشت فوتون درون کاواک است. اما برای محاسبه بیشینه چگالی توان خروجی، اگر معادلات رابطه (۱) بر هم تقسیم و انتگرال گیری شود، چگالی شار فوتونی بیشینه مطابق رابطه زیر به دست می آید:

$$\varphi_{max} = \left( \frac{l_r \gamma}{l_c} \right) \left[ N_i - N_{th} + N_{th} \ln \left( \frac{N_{th}}{N_i} \right) \right] \quad (13)$$

بنابراین در شرایط ویژه‌ای می توان به بیشینه توان قله دست یافت که مانند شکل (۲)، جمعیت وارونگی به مقدار آستانه  $N_{th}$  رسیده باشد و چگالی شار فوتونی به مقدار بیشینه خود برسد، یعنی وقتی که  $(N=N_{th}, \varphi=\varphi_{max})$ . یکی دیگر از مشخصه‌های پرتو خروجی لیزر در حالت کلید زنی  $Q$ ، محاسبه پهنای زمانی تپ لیزر (FWHM) است که از رابطه (۱۴) به راحتی قابل محاسبه است: [۱۰]

$$t_p = \frac{t_r}{\ln \left( \frac{1}{R} \right) + L} \left\{ \frac{N_i - N_f}{N_i - N_{th} \left[ 1 + \ln \left( \frac{N_i}{N_{th}} \right) \right]} \right\} \quad (14)$$

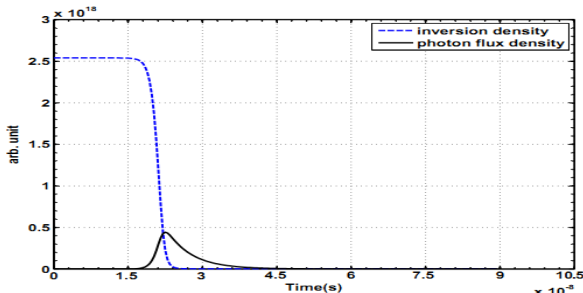
$N_f$  و  $N_i$  به ترتیب جمعیت وارون اولیه و نهایی هستند.

توان قله تپ نیز از رابطه (۱۵) به دست می آید:

$$P_p = \frac{E_Q}{t_p} \quad (15)$$

#### ۴- نتایج حاصله از حل عددی معادلات نرخ لیزر:

در حالت کلید زنی  $Q$ ، اگر جمعیت وارون الکترونی با جمعیت آستانه که دارای مقدار  $N_{th}=2.3 \times 10^{+17}$  است، برابر شود، آنگاه شار خروجی لیزر بیشینه شده و تپ نوری شکل می گیرد. این رفتار در شکل ۲ به خوبی مشاهده می گردد.



شکل ۲: چگالی جمعیت وارون و چگالی شار فوتونی و شکل تپ خروجی در

حالت کلید زنی  $Q$

تطابق با نتایج تجربی نیاز است که مقدار دقیق این کمیت را بدانیم. این کار با وارد کردن مشخصات دقیق چیدمان لیزر دمش دیودی موجود در آزمایشگاه ( مطابق جدول ۱ و شکل ۱) با استفاده از روش ردیابی پرتو در نرم افزار LASCAD انجام شده است [۹]. اما چگالی فوتون‌های اولیه را با کمک رابطه (۸) می توان به شکل رابطه زیر نوشت:

$$(10)$$

$$\varphi_0 = \frac{E_0}{Al_c E_p}$$

بدر نظر گرفتن شرایط اولیه و با

پیش بینی جواب ثانویه معادلات دیفرانسیل رابطه (۱)، جواب معادلات جفت شده به شکل رابطه افزایشی (۱۱) تبدیل می شود:

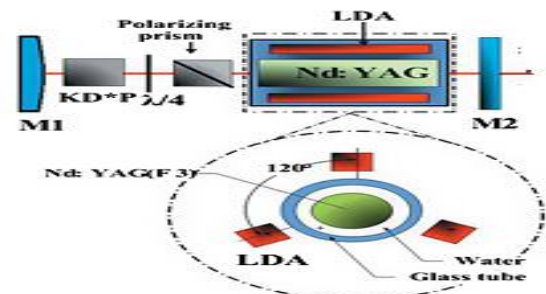
$$N_{i+1} = N_i - (\gamma c \sigma_{eff} N_i \varphi_i) \delta t$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \left[ c \sigma_{eff} N_i \varphi_i \left( \frac{l_r}{l_c} \right) - \omega_{L(i)} \varphi_i \right] \delta t \quad (11)$$

$i$  یک عدد صحیح و  $\delta t$  گام زمانی برای حل معادلات است که می توان آن را مقدار کوچک  $250$  پیکوثانیه در نظر گرفت. حال معادلات رابطه (۱۱) با مقادیر اولیه چگالی فوتون و چگالی جمعیت وارون به طور تکراری قابل حل هستند.

جدول ۱: کمیت‌های استفاده شده در روش حل عددی معادلات نرخ لیزر

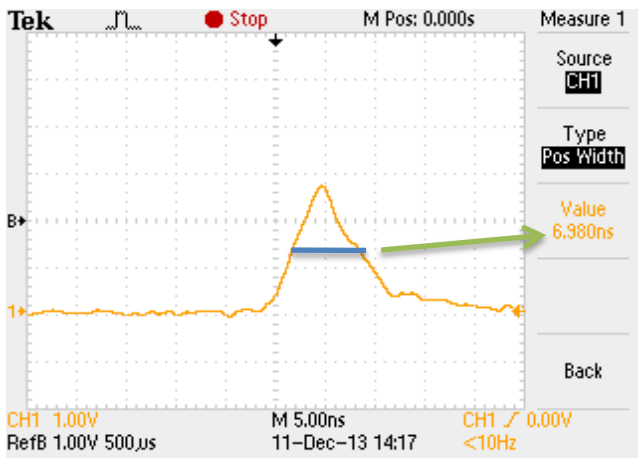
$l_r$	۸۰ mm	$W_3$	۰/۶۲۵ mm
$l_c$	۳۴۰ mm	$T_p$	۲۰۰ $\mu$ s
$P$	۲۲۵۰ w	$\lambda_p$	۸۰۸ nm
$W_p$	۱/۵ mm	$\lambda_l$	۱۰۶۴ nm
$\sigma_{eff}$	$2.8 \times 10^{-17} \text{ mm}^2$	$\gamma$	۰/۹
$R$	%۳۰	$d\Omega$	۱ mrad



شکل ۱: چیدمان لیزر کلید زنی  $Q$

انرژی خروجی تپ کلید زنی  $Q$ ، یکی از مشخصه‌های اصلی لیزر است که توسط رابطه (۱۲) که مجموع شار فوتون‌های خارج شده از آینه خروجی است قابل محاسبه می باشد:

تپ لیزر نشان داد که حل عددی با دقت بالایی انجام شده است.



شکل ۵: اندازه‌گیری پهنای زمانی تپ لیزر ۶/۹ نانوثانیه

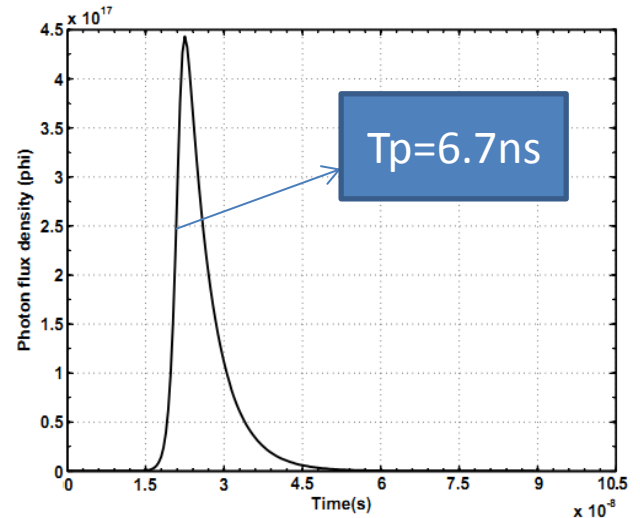
### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش حل عددی معادلات دیفرانسیل جفت شده در عملکرد کلید زنی Q لیزر ارائه گردید. با استفاده از این روش به راحتی می‌توان علاوه بر رسم شکل تپ خروجی لیزر، به مشخصات این تپ از جمله انرژی، پهنای و توان قله بنا به نرخ اتلافی که در کاواک ایجاد می‌شود دست یافت. با کد نویسی معادلات نرخ لیزری در نرم‌افزار MATLAB تلفات درون کاواکی محاسبه و پارامترهای خروجی لیزر آزمایشگاهی بهینه شدند.

مراجع

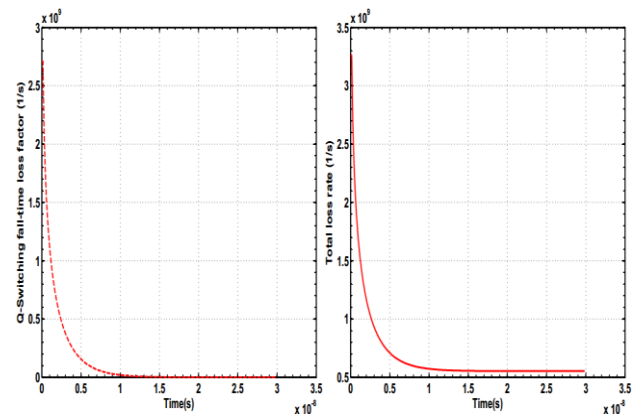
- [1] O. Svelto, *Principles of Lasers*, 5<sup>th</sup> Edition, Springer, New York, 2010.
- [2] W. Koechner, “*Solid State Laser Engineering*”, Springer, (2006).
- [3] F.J. McClung and R.W. Hellwarth, *Giant optical pulsations from ruby*, p. 828-829, **J. Appl. Phys.**, 1962.
- [4] W.G. Wagner and B.A. Lengyel, *Evolution of the giant pulse in a laser*, p. 2040-2046, **J. Appl. Phys.**, 1963.
- [5] R.B. Kay and G.S. Waldman, *Complete solutions to the rate equations describing Q-spoiled and PTM laser operation*, p. 1319-1323, **J. Appl. Phys.**, 1965.
- [6] X. Zhang, S. Zhao, Q. Wang, B. Ozygus, and H. Weber, *Modeling of Diode-Pumped Actively Q-Switched Lasers*, p. 1912-1918, **IEEE J. of Quantum Electronics**, 1999.
- [7] K. Yang, S. Zhao, G. Li and H. Zhao, *Theoretical and experimental study of a laser-diode-pumped actively Q-switched Nd:YVO<sub>4</sub> laser with acoustic-optic modulator*, p. 381-386, **Opt & Laser Technol.**, 2005.
- [8] D.B. Coyle, D.V. Guerra and R.B. Kay, *An interactive numerical model of diode-pumped, Q-switched/cavity-dumped lasers*, p. 452-462, **J. Appl. Phys.**, 1995.
- [9] K. Altmann, *LAS-CAD Software, Laser Cavity Analysis and Design, The Unique Combination of Simulation Tools*, <http://www.lascad.com>, Munich, 2014.
- [10] Y. F. Chen, Y. P. Lan, S. W. Tsai, *High-power diode-pumped actively Q-switched Nd:YAG laser at 1123 nm*, p. 309-313, **Opt Comm.**, 2004.

به طور جداگانه شکل زمانی تپ نوری لیزر که از نتایج مهم حل عددی است، در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل ۳: نمایه تپ خروجی در حالت کلید زنی Q

نرخ تلفات کل و تلفات کلید زنی Q که در روابط (۲)، (۴) و (۱۱) معرفی شده‌اند، در شکل‌گیری پهنای زمانی تپ خروجی لیزر نقش دارند و بایستی مقدار عددی این کمیت‌ها مشخص گردند. در شکل ۴ نرخ تغییرات تلفات محاسبه شده، آورده شده است. همان‌طور که در نمودار سمت راست شکل ۴ دیده می‌شود، پس از برداشته شدن اتلاف کلید زنی Q، تلفات لیزر به پایین‌ترین سطح که همان اتلاف ثابت درون کاواکی ناشی از جذب و پراکندگی مطابق با رابطه (۳) است، می‌رسد. تپ خروجی شبیه‌سازی شده به روش حل عددی، دارای انرژی ۴۵ میلی ژول، پهنای زمانی ۶/۷ نانوثانیه و توان قله ۶/۷ مگاوات است که به ترتیب با استفاده از روابط (۱۲)، (۱۴) و (۱۵) از طریق کد نویسی در نرم‌افزار MATLAB به دست آمده‌اند.



شکل ۴: نمایش اتلاف کلید زنی Q و اتلاف کل کاواک

در چیدمان آزمایشگاهی برپا شده در پژوهشکده لیزر دانشگاه صنعتی مالک اشتر، پهنای زمانی تپ خروجی لیزر در حدود ۶/۹ نانوثانیه طبق شکل ۵ اندازه‌گیری گردید. اندازه‌گیری پهنای زمانی