بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

مرکزیابی پرتو چرخان با استفاده از مقادیر شیب جبهه‌ی موج

محمد یگانه[۱] و سیف‌اله رسولی[۱و۲]

۱- دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان، زنجان

۲- مرکز پژوهشی اپتیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان، زنجان

چکیده – در برخی از موارد، از جمله اندازه‌گیری بار توپولوژیکی موج لاگر-گوسی، یا در اپتیک تطبیقی به‌منظور بازسازی جبهه‌ی موجی که از محیط متلاطم شدید عبور کرده است، نیاز به تعیین دقیق محل تکینگی فاز در این پرتوها وجود دارد. در این مقاله، ما روش جدیدی برای تعیین مرکز پرتو چرخان معرفی می‌کنیم که در آن از مقادیر شیب جبهه‌ی موج پرتو مورد نظر استفاده می‌شود. به‌نحوی که انطباق مرکز دستگاه مختصات و مرکز باریکه، موجب کمینه شدن وردش بار توپولوژیکی محاسبه شده می‌گردد. مقادیر شیب، توسط یک حسگر جبهه‌ی موج مثل حسگر جبهه‌ی موج ماره‌ای اندازه‌گیری می‌شود. به منظور ارزیابی قابلیت این روش، پرتو چرخان با اعمال فاز سمتی به یک تلفیق‌گر فضایی به همراه فاز نوفه و یا فاز مربعی ایجاد گردید. همچنین از توری دامنه‌ای نیز برای تولید پرتو چرخان استفاده شد و پرتو تولید شده از آن از روی سطح گرمی که عامل ایجاد یک محیط متلاطم همرفتی بود، عبور داده شد. در ادامه مرکزیابی این پرتوها انجام می‌گیرد و ملاحظات لازم برای آن بررسی و گزارش می‌شود.

کلید واژه- انحراف‌سنجی ماره‌ای، بار توپولوژیکی، پرتو چرخان، تلفیق‌گر فضایی نور، موج لاگر-گوسی.

Center of Vortex Beam Determination using Wave Front Gradients

Mohammad Yeganeh[1] and Saifollah Rasouli[1, 2]

1- Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran

2- Optics Research Center, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran.

Abstract- When a light beam passes through a strongly atmospheric turbulence, phase singularities appear in some points of the wave front surface. For reconstruction of these beams or extracting topological charge of a pure Laguerre-Gaussian beam, it is needed to determine the center of the vorticities. In this work, we introduce a new method for this purpose by use of the wavefront slope value data. For a case, center of vortex beam and the selected origin for the coordinate system match together, the variance of determined topological charge to be minimized. Wavefront slops can be extracted with a wavefront sensor like a two-channel moiré based wavefront sensor. In experiment, lens phase function or a white noise are added to an azimuthally dependence phase of an incident beam. This is done by use of diffraction of a plane wave from a LCD, which is used as a spatial phase modulator. In addition, we used amplitude forked grating and allow passing diffracted beam through a turbulent medium. Then, we determined centers of these beams and noted some considerations for this process.

Keywords: Laguerre-Gaussian Beam, Moiré Deflectometry, SLM, Topological Charge, Vortex Beam.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-07-29]

۱- مقدمه

پرتو لاگر-گوسی یکی از پرتوهای شناخته شده‌ی چرخان است که در معادله‌ی این موج، جمله‌ی وابسته به زاویه‌ی سمتی به‌شکل $e^{il\varphi}$ ظاهر می‌شود. زاویه‌ی سمتی φ در دستگاه مختصات استوانه‌ای که محور z آن منطبق بر راستای انتشار موج است تعریف می‌شود. l بار توپولوژیکی این پرتو است. انتشار یک پرتو چرخان در محیط می‌تواند باعث سوار شدن فاز اضافی با تابعیت‌های مختلف روی جبهه‌ی موج گردد. از آنجا که حوالی مرکز چنین پرتوی تاریک می‌باشد، تعیین محل دقیق مرکز با استفاده از توزیع شدت کار مشکلی است، خصوصاً اینکه با دانستن مرکز پرتو، تعیین بار توپولوژیکی آن در شرایط خاصی بسیار ساده می‌شود. همچنین در عبور چنین پرتوی از محیطهای فازی نامنظم مثل جو متلاطم، شکل متقارن پرتو می‌تواند تغییر یابد و مرکز شدتی آن لزوماً بر نقطه‌ی تکینه‌ی فاز منطبق نخواهد گردید. تعیین محل دقیق مرکز باریکه در اپتیک تطبیقی، زمانی که جبهه‌ی موج پرتو عبوری از محیط متلاطم شدید بازسازی می‌شود، اهمیت پیدا می‌کند[۱]. تعیین نقاط تکینه در این موارد به دو روش صورت می‌پذیرد: در روش اول، حول تک‌تک نقاط اندازه‌گیری، انتگرال بسته‌ی شیب جبهه‌ی موج حساب می‌شود تا در جایی که این انتگرال مضرب صحیحی از 2π شود، وجود نقاط تکینه ثابت شود[۱]. در روش دوم که به روش پتانسیل چرخشی مشهور است، ماتریس پتانسیل از طریق شکل دادن ماتریس شیب و ضرب ماتریس دوران یافته‌ی آن به اندازه‌ی ۹۰ درجه در شبه معکوس ماتریس هندسی که ماتریس اخیر به شکل و مشخصات حسگر بستگی دارد، به دست می‌آید. ماتریس پتانسیل در محل نقاط تکینه دارای بیشینه یا کمینه است. [۲]. در این کار ما روش جدیدی برای تعیین مرکز باریکه‌ی چرخان مبتنی بر مقادیر شیب جبهه‌ی موج معرفی می‌کنیم. همچنین به‌منظور ارزیابی صحت این روش، به بررسی پرتوهای چرخان متفاوتی خواهیم پرداخت که در جبهه‌ی موج آنها یک فاز اضافی به‌صورت نوفه‌ی سفید، فاز مربعی و نیز فاز ناشی از عبور پرتو از محیط متلاطم سوار شده است. اندازه‌گیری شیب جبهه‌ی موج توسط حسگر جبهه‌ی موج دوکانالی ماره‌ای انجام پذیرفته است[۳].

۲- تئوری

اگر به فاز پرتو لاگر-گوسی با بار توپولوژیکی l که در راستای z منتشر می‌شود و دارای شعاع انحنای $R(z)$ است، تابعیت فضایی $f(r,\varphi)$ را اضافه کنیم، فاز و شیب آن در فواصل دور از مبدأ انتشار به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} w &= \frac{k\rho^2}{2R(z)} + l\varphi - \Psi(z) + f(\rho,\varphi) \\ \nabla w_\perp &\approx \frac{l}{\rho}\hat{\varphi}_0 + \frac{k\rho}{R(z)}\hat{\rho}_0 + \nabla_\perp f(\rho,\varphi), \end{aligned} \qquad (۱)$$

که $\hat{z}_0$ بردار یکه در راستای محور zها و $\hat{\varphi}_0$ بردار یکه در راستای افزایش زاویه‌ی سمتی به مرکزیت مرکز موج است. ρ فاصله‌ی هر نقطه از سطح جبهه‌ی موج نسبت به محور آن می‌باشد. همچنین $\Psi(z)$ فاز گوی (Gouy) است که در فواصل انتشار طولانی به مقدار ثابت $\pi/2$ میل می‌کند. تابع $f(r,\varphi)$ می‌تواند فاز اضافی دلخواهی باشد که در اثر انتشار توسط یک جسم فازی، یا حین تولید پرتو روی جبهه‌ی موج آن سوار شده است. از این رابطه مشخص است که تنها مؤلفه‌ی سمتی شیب جبهه‌ی موج در تعیین بار توپولوژیکی مؤثر است. در غیاب فاز اضافی f و یا حضور ابیراهی‌هایی که مؤلفه‌ی سمتی ندارند، بهتر است برای تعیین بار توپولوژیکی مؤلفه‌ی سمتی شیب را جدا کنیم.

۲-۱- جداسازی مؤلفه‌ی سمتی شیب

مؤلفه‌های شعاعی و سمتی شیب جبهه‌ی موج با توجه به شکل ۱ از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \nabla w_\rho = |\nabla w|\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \nabla w_\varphi = |\nabla w|\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{cases} \qquad (۲)$$

در این روابط، زوایای φ_1 و φ_2 به‌ترتیب زوایای بردار مکان $\vec{\rho}$ و بردار شیب با محور x هاست و داریم

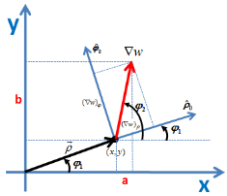
$$\begin{cases} \varphi_1 = \tan^{-1}(y/x),\ \varphi_2 = \tan^{-1}(b/a) \\ a = |\nabla w|\cos\varphi_2,\ b = |\nabla w|\sin\varphi_2 \end{cases}, \qquad (۳)$$

مقادیر a و b همان مؤلفه‌های شیب جبهه‌ی موج است که حسگر جبهه‌ی موج در نقاط (x,y) از سطح جبهه‌ی

[Downloaded from opsi.ir on 2026-07-29]

موج گزارش می‌کند. در این روابط فرض شده که مرکز دستگاه مختصات منطبق بر مرکز پرتو است. با این فرض، و در غیاب ابیراهی‌هایی که مؤلفه‌ی سمتی شیب جبهه‌ی موج دارند، می‌توان مقدار بار توپولوژیکی را از روی مؤلفه‌های شیب جبهه‌ی موج در نقطه‌ای مانند (x,y) به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$l=\rho\left(\nabla w\right)_{\varphi}=\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)}\,\sin(\varphi_2-\varphi_1). \quad (۴)$$



شکل ۱: نمایش نحوه‌ی استخراج مؤلفه‌ی سمتی شیب جبهه‌ی موج

۲-۲- مرکزیابی پرتو چرخان

از آنجا که در روش معرفی شده، درستی مقدار بار توپولوژیکی اندازه‌گیری شده کاملاً به فاصله‌ی نقطه‌ی اندازه‌گیری تا مرکز پرتو وابسته است، ما در اینجا روشی را برای یافتن مرکز پرتو بدون نیاز به استفاده از الگوی شدت پرتو پیشنهاد می‌کنیم. در رابطه‌ی ۱، ابتدا فرض می‌کنیم: $\nabla w_{\perp}=\frac{l}{\rho}\hat{\varphi}_0$، لذا با معلوم بودن مرکز پرتو، بار توپولوژیکی را از هر نقطه از سطح آن که مقدار شیب در آن نقطه معلوم باشد را به صورت $l=\rho|\nabla w|$ می‌توان تعیین کرد. اگر مطابق شکل۲ مرکز مختصات در نقطه‌ی $(\Delta x,\Delta y)$ فرض شود داریم: $\rho'=\sqrt{(x-\Delta x)^2+(y-\Delta y)^2}$. در غیاب ابیراهی‌هایی که تغییر مؤلفه‌ی سمتی شیب شود، ما می‌توانیم مؤلفه‌ی سمتی شیب را نسبت به مرکز پرتو، یعنی ∇w_{φ} را جدا کرده و از روی آن کمیت بار توپولوژیکی را حساب کنیم. با معلوم نبودن مکان مرکز پرتو، ما به‌جای بار توپولوژیکی، کمیتی مثل L را به‌دست می‌آوریم که: $L=\rho'\nabla w_{\varphi'}$. برای این کمیت می‌توان نوشت:

$$L=\nabla w_{\varphi'}(x,y)\sqrt{(x-\Delta x)^2+(y-\Delta y)^2} \quad (۵)$$

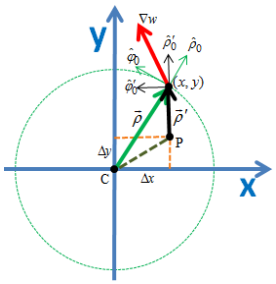
در رابطه‌ی اخیر، فرض شده است که جابه‌جایی مرکز باریکه از مرکز مختصات، هم مؤلفه‌ی سمتی شیب جبهه‌ی موج و هم مقدار ρ' را تغییر داده است. بعداً ثابت خواهیم کرد که در جابه‌جایی‌های کوچک، تغییر مؤلفه‌ی سمتی ناچیز است. برای وردش کمیت L داریم:

$$\begin{aligned}\sigma_L^2&=\overline{L^2}-\overline{L}^2\\&=\left(\int L^2 d\vec{\rho}\Big/\int d\vec{\rho}\right)-\left(\int L d\vec{\rho}\Big/\int d\vec{\rho}\right)^2\end{aligned} \quad (۶)$$

در محاسبه‌ی این رابطه‌ی فرض می‌کنیم پرتو چرخان شکل دایروی داشته باشد و شعاع ناحیه‌ی تاریک و شعاع خارجی پرتو به‌ترتیب R_1 و R_2 باشد. در نهایت مقدار وردش با حذف جملات مرتبه‌های بالاتر از دو برای مقادیر جابه‌جایی، برابر خواهد شد با:

$$\sigma^2\approx l^2\left\{\frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{R_2^2-R_1^2}\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]\right\} \quad (۷)$$

رابطه‌ی اخیر نشان می‌دهد انطباق مرکز مختصات و مرکز باریکه، موجب کمینه شدن کمیت وردش در محاسبه‌ی بار توپولوژیکی می‌گردد و از رابطه‌ی ۵ واضح است که در این حالت کمیت L همان بار توپولوژیکی است.



شکل ۲: نمایش مؤلفه‌های شیب جبهه‌ی موج در دو دستگاه مختصات به مرکزیت C منطبق بر مرکز باریکه، و یا به مرکزیت نقطه‌ی دلخواهی مانند P.

در حالتی که مرکز باریکه و مبدأ مختصات برهم منطبق نباشد، نمی‌توان به طور دقیق مؤلفه‌های سمتی و شعاعی موج را استخراج نمود. به‌منظور بررسی اثر جابه‌جایی مرکز باریکه از مرکز مختصات روی مؤلفه‌ی سمتی شیب جبهه‌ی موج، از رابطه‌ی ۲ می‌توانیم بنویسیم:

$$\nabla w_{\varphi'}(x,y)=m\left|\nabla w(x,y)\right| \quad (۸)$$

می‌خواهیم تأثیر جابه‌جایی مرکز باریکه در راستای x و y

[Downloaded from opsi.ir on 2026-07-29]

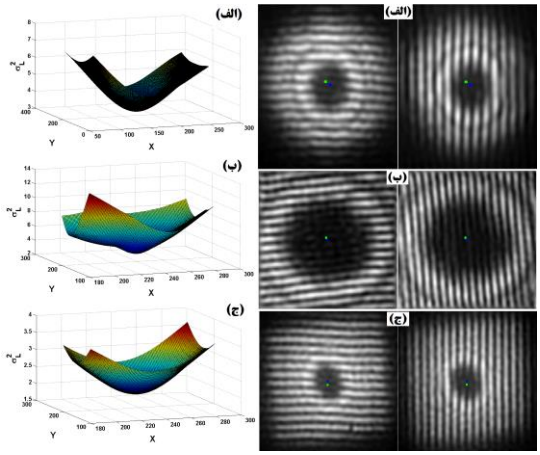
را روی ضریب m را بررسی کنیم. مطابق شکل۱ و رابطه‌ی۳، با تغییر Δx و Δy مقدار زاویه‌ی φ_2 ثابت می‌ماند. همچنین داریم: $\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y-\Delta y}{x-\Delta x}\right)$، لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$\left[\frac{\partial m}{\partial(\Delta x)}, \frac{\partial m}{\partial(\Delta y)}\right] \approx \frac{\cos(\varphi_2-\varphi_1)}{\rho'}\left[-\sin\varphi_1, \cos\varphi_1\right] \quad (۹)$$

هر دو عبارت فوق با ρ' نسبت عکس، و با $\cos(\varphi_2-\varphi_1)$ نسبت مستقیم دارند. کمیت دوم، طبق رابطه‌ی۲ ضریبی است که با ضرب شدن در مقدار شیب جبهه‌ی موج، مؤلفه‌ی شعاعی آن‌را می‌دهد. می‌توان نتیجه گرفت که اگر مؤلفه‌ی شعاعی جبهه‌ی موج و مقادیر جابه‌جایی از مبدأ نیز کوچک باشند، در فواصل دورتر از مرکز وابستگی مؤلفه‌ی سمتی به مختصات مرکز قابل اغماض است.

۳- کارهای تجربی

پرتو چرخان تولید شده در این کار از نوع لاگر-گوسی بود که به دو روش مختلف، شامل استفاده از LCD عبوری به‌عنوان تلفیق‌گر فضایی، و همچنین استفاده از توری دامنه‌ای با الگوی چنگالی بود. فاز سوار شده روی جبهه‌ی موج تخت ورودی به تلفیق‌گر با تعداد آرایه‌های 1024×768 پیکسل و قطر $0.7''$، از یک لیزر He-Ne تولید می‌شد که پس از پالایش فضایی و پهن شدن وارد آن می‌شد. توسط تلفیق‌گر، فاز سمتی با بار توپولوژیکی $l=5$ به همراه فاز نوفه با بازه‌ی $[0,\pi/5]$ و یا فاز مربعی با شعاع انحنای ۷ متر روی پرتو سوار شد. همچنین از توری دامنه‌ای با تعداد انشعاب ۵ نیز برای تولید پرتو چرخان استفاده شد و پرتو تولید شده از آن از روی ورق فلزی گرمی که عامل ایجاد یک محیط متلاطم همرفتی بود، عبور داده شد. شیب جبهه‌ی موج توسط حسگر جبهه‌ی موج دوکاناله‌ی ماره‌ای مشابه کار قبلی[۴] اندازه‌گیری شد و مرکزیابی پرتو برای این پرتوها انجام گرفت. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد این است که اضافه شدن ابیراهی کج‌شدگی به موج، حتی مقادیر کم آن، روی مؤلفه‌ی سمتی موج تأثیرگذار است. بهترین روش حذف این اثر، حذف ابیراهی کج‌شدگی در دو راستا است. ما برای بررسی این اثر، در پنج تصویر که کج‌شدگی مشخصی روی آنها ایجاد کرده بودیم، مرکز باریکه را تعیین نمودیم. نقطه‌ی مرکزی پرتو بدون حذف این اثر، با خطای زیادی تعیین گردید. با این حال اثر نوفه و فاز مربعی، روی نتایج بی‌تأثیر بودند.



شکل ۳: راست: نمایش نقطه‌ی مرکز پرتو چرخان که الف) از جو متلاطم عبور داده شده است، ب) فاز مربعی به آن اضافه شده است و ج) فاز تصادفی به آن اضافه شده است. نقطه‌های سبز، مرکز به‌دست آمده برای پرتو بدون حذف اثر کج شدگی، و نقاط آبی با حذف اثر کج‌شدگی پرتو در دو کانال به‌دست آمده‌اند. چپ: نمودار وردش کمیت L با جابه‌جایی مرکز مختصات.

۴- نتیجه‌گیری

محاسبات انجام شده نشان دادند که برای تعیین مرکز پرتو چرخان، می‌توان مقدار وردش کمیت L را با تغییر محل مبدأ مختصات کمینه نمود. در این حالت، مبدأ مختصات منطبق بر مرکز پرتو خواهد بود و کمیت فوق همان بار توپولوژیکی پرتو است. اضافه شدن فاز مربعی یا نوفه، به‌شرطی که مقدار این فاز نتواند پله‌ی فازی روی سطح جبهه‌ی موج ایجاد کند، تأثیری روی این محاسبات ندارند. اما لازم است برای این محاسبات، اثر ابیراهی کج‌شدگی را حذف نماییم.

مراجع

[1] D.L. Fried, *Adaptive optics wave function reconstruction and phase unwrapping when branch points are present*, **Optics Communications**, 200 (2001) 43-72.
[2] K. Murphy, D. Burke, N. Devaney, C. Dainty, *Experimental detection of optical vortices with a Shack-Hartmann wavefront sensor*, **Optics express**, 18 (2010) 15448-15460.
[3] S. Rasouli, M. Dashti, A.N. Ramaprakash, *An adjustable, high sensitivity, wide dynamic range two channel wave-front sensor based on moiré deflectometry*, **Optics express**, 18 (2010) 23906-23915.
[4] M. Yeganeh, S. Rasouli, M. Dashti, S. Slussarenko, E. Santamato, E. Karimi, *Reconstructing the Poynting vector skew angle and wavefront of optical vortex beams via two-channel moiré deflectometery*, **Optics letters**, 38 (2013) 887-889.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-07-29]