بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف در الکترودینامیک کوانتومی کاواک

مسلم علیدوستی شهرکی و سینا خراسانی
دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

چکیده – در این مقاله الکترودینامیک کوانتومی کاواک در سیستمی متشکل از هشت نقطه کوانتومی در برهم‌کنش با یک مد کاواک شبیه‌سازی و میزان آشوب مشاهده شده در این سیستم با استفاده از محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف در رژیم‌های تزویج متفاوت تخمین زده شده است. در سیستم مذکور فرض شده نقاط کوانتومی به شکل زنجیره‌ای خطی در کنار هم قرار گرفته‌اند، به نحوی که هر نقطه‌ی کوانتومی فقط با نقاط همسایه‌ی خود در برهم‌کنش است. نشان داده می‌شود که آنتروپی کولموگروف با شدت تزویج افزایش می‌یابد و در نتیجه سیستم مورد نظر آشوب‌ناک خواهد بود.

کلید واژه- آشوب، آنتروپی کولموگروف، الکترودینامیک کوانتومی کاواک، سیستم‌های کوانتومی نوری

Calculation of Kolmogorov Entropy in Cavity Quantum Electrodynamics

Moslem Alidoosty Shahraki, Sina Khorasani
School of electrical engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Abstract- In this paper Kolomogorov entropy of a simulated cavity quantum electrodynamics in a multi-partite system consisting of eight quantum dots in interaction with one cavity mode has been estimated. It has been shown that the Kolmogorov Entropy monotonically increases with the increasing coupling strength, which is a sufficient condition for chaotic behavior under ultrastrong coupling regime. The arrangement of the quantum dots is assumed to be in the form of a linear chain where dipole-dipole interactions are considered only between the nearest neighbors.

Keywords: Chaos, Kolmogorov Entropy, Cavity Quantum Electrodynamics, Quantum Optics.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-08]

۱- مقدمه

اخیراً درهم‌تنیدگی کوانتومی به یکی از موضوعات پیشرو و مورد علاقه تبدیل شده است. دلیل این موضوع وجود کاربردهای بسیار متنوع بالفعلی است که این پدیده در مخابرات، اطلاعات و محاسبات کوانتومی دارد. الکترودینامیک کوانتومی کاواک یکی از لبه‌های دانش در این زمینه می‌باشد. این شاخه‌ی اپتیک کوانتومی، برهم‌کنش مابین سیستم‌های نوری کوانتومی و نور محصور شده در کاواک را مطالعه می‌کند [۱]. توانایی سوئیچ کردن مابین شبکه‌های نوری خطی در [۲]، حاصل تولید حالت‌های درهم‌تنیده‌ی بس مد می‌باشد. بنابراین لازم است این سیستم‌ها به طور دقیق و کامل مورد بررسی قرار گیرند. اما از آن‌جایی که ساخت و دسترسی به آن‌ها حداقل با توجه به تکنولوژی کنونی بسیار سخت است، امکان شبیه‌سازی این سیستم‌ها به صورت عددی ضروری می‌باشد. اخیراً در [۳] امکان شبیه‌سازی سیستم‌های چندبخشی فراهم شده است، که برای این دست از سیستم‌های کوانتومی از نظر محاسباتی در کل کاری بسیار مشکل است. تنها کار انجام شده و قابل توجه در حد اطلاع نگارندگان در این رابطه که در آن شبیه‌سازی یک سیستم واقعی انجام شده مذکور در [۴] می‌باشد. اما مفید بودن استفاده از این سیستم‌های فیزیکی به وضوح با توجه به گستردگی و نوع مسائلی که با آن‌ها روبرو می‌شویم، محدود است. در همین راستا، اخیراً موفق به ارائه‌ی شبیه‌سازی جامعی شدیم که امکان مطالعه‌ی سیستم‌های کوانتومی چندبخشی دلخواه را فراهم نموده است [۵]. تئوری زیربنای این شبیه‌سازی بر اساس گسترش هامیلتونین جینس-کامینگز-پاول بوده و ارائه شده در [۶و۷] می‌باشد. این کار در [۸] با معرفی نمادگذاری و فرمول‌بندی جدیدی انجام شد و در ادامه‌ی آن اصلاحاتی در هامیلتونی فوق‌الذکر انجام پذیرفته است [۹-۱۰].

در مرجع [۵] یک سیستم ساطع‌کننده‌ی واقعی سه ترازه [۱۱] در برهم‌کنش با یک مود را شبیه‌سازی کرده‌ایم. هم‌چنین برای اولین بار در [۵] امکان شبیه‌سازی یک سیستم کوانتومی پیچیده متشکل از شش نقطه‌ی کوانتومی در برهم‌کنش با یک مد کاواک فراهم شد. در آخرین کار انجام شده موفق به مطالعه‌ی یک سیستمی کوانتومی نُه‌بخشی و متشکل از هشت نقطه کوانتومی در برهم‌کنش با یک مد کاواک را به طور کاملاً دقیق در رژیم‌های تزویج متفاوت شبیه‌سازی نموده‌ایم [۱۲]. در این سیستم همان‌طور که براساس [۵] هم حدس می‌زدیم رفتار سیستم در تزویج بسیار قوی آشوب‌ناک بود، که در این‌جا با استفاده از محاسبه‌ی پارامتر آنتروپی کولموگروف صحت بروز پدیده‌ی رفتار آشوبی را نشان خواهیم داد.

تاکنون حضور آشوب در سیستم‌های نوری، مایکروویو و نانوفوتونیک [۱۳-۱۵] نشان داده شده است. اما نحوه‌ی محاسبه‌ی آن تاکنون در مورد رفتار سیستم‌های کوانتومی چندبخشی و در حد اطلاع نگارندگان مطالعه نشده است. اکنون ضمن نشان دادن کلیات شبیه‌سازی سیستم مذکور که در آن نحوه‌ی قرارگیری نقاط کوانتومی به فرم زنجیره‌ای است، جزئیات و چگونگی محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف را در این سیستم‌ها ارائه خواهیم داد.

۲- شبیه‌سازی

در این قسمت ضمن معرفی سیستم مورد نظر به طور کلی روش شبیه‌سازی را براساس کارهای چاپ شده‌ی [۵و۱۲] توضیح می‌دهیم. در این سیستم نُه‌بخشی همان‌طور که گفته شد، هشت نقطه‌ی کوانتومی همان‌طور که درشکل ۱ آمده است به صورت زنجیره‌ای خطی قرار گرفته‌اند. بدین ترتیب برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی فقط برای هر دو نقطه‌ی کوانتومی مجاور در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه بسیاری از پارامترهای هامیلتونین توصیف کننده‌ی برهم‌کنش نقاط کوانتومی با یکدیگر حذف خواهند شد. ابتدا فضای حالت سیستم را بر اساس [۵] می‌نویسیم. این فضای حالت شامل کلیه‌ی حالات سطوح انرژی و مدهای کاواک در سیستم مورد نظر خواهند شد.

شکل ۱: قرارگیری سیستم‌های ساطع کننده (نقاط کوانتومی) [۵].

معادله‌ی (۱) فضای حالت در این سیستم را بیان می‌کند.

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{r_{1\ldots7},r_8=e,g}\sum_{f=0}^{8}\phi(A,f)|A\rangle|f\rangle$$
$$|A\rangle = \bigotimes_{n=1}^{8}\left|\begin{matrix}n\\r_n\end{matrix}\right\rangle = \left|\begin{matrix}1\\r_1\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}2\\r_2\end{matrix}\right\rangle\ldots\left|\begin{matrix}8\\r_8\end{matrix}\right\rangle \qquad 1\le r_n\le 2 \qquad (۱)$$

$|A\rangle$ کت حالت سطوح انرژی مختلف ساطع‌کننده‌های نور کوانتومی است. r_n سطح انرژی نقطه‌ی کوانتومی nام است همچنین $|f\rangle$ کت حالت مدهای کاواک است. f_1 تنها مد کاواک در این سیستم است به طوری که حداکثرتعداد فوتون‌های قرارگرفته در آن هشت عدد می‌باشد [۵]. هامیلتونین در این سیستم با توجه به [۵] به صورت معادله‌ی (۲) نوشته می‌شود.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} + \hat{H}_{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}}$$
$$\hat{H}_0 = \sum_i E_i^n\hat{\sigma}_i^n + \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$$
$$\hat{H}_{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{n<m,i<j}(\eta_{nij}\hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta^*_{nij}\hat{\sigma}_{j,i}^n)(\eta_{mij}\hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta^*_{mij}\hat{\sigma}_{j,i}^m) \qquad (۲)$$
$$\hat{H}_{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}} = \sum_{n,i<j}(\gamma_{nij}\hat{\sigma}_{i,j}^n + \gamma^*_{nij}\hat{\sigma}_{j,i}^n)(g_{nij}\hat{a} + g^*_{nij}\hat{a}^\dagger)$$

در (۲)، $\hat{H}_0$ انرژی سیستم را بدون هر گونه برهم‌کنشی بیان

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-08]

می‌کند. $\hat{H}_{r\cdot E}$ مربوط به برهم‌کنش نور و ساطع‌کننده است و $\hat{H}_{r\cdot r}$ توصیف‌کننده برهم‌کنش مابین هر دو ساطع‌کننده است. γ_{nij} المان‌های ماتریس عملگر دوقطبی ساطع‌کننده‌ی nام است، شدت برهم‌کنش دوقطبی مابین امیتر nام و مد vام در انتقال از تراز انرژی iام به jام، g_{nij} است. η_{nij} متناسب با شدت دوقطبی تولید شده هنگام متحمل شدن انتقال از تراز iام به jام است و بالآخره E_i^n دلالت می‌کند به مقدار سطح انرژی iام ساطع‌کننده‌ی nام. مقادیر عددی پارامترها به طور کامل در [۱۲] آمده است. با توجه به تحلیل در رژیم‌های متفاوت، مقادیر در نظر گرفته شده‌ی متفاوتی برای g_{nij} که تعیین کننده‌ی رژیم تزویج می‌باشد، در نظر گرفته شد. اکنون با استفاده از معادله‌ی (۲) و عملکرد آن روی (۱) و با استفاده از حل معادله‌ی شرودینگر و در نظر گرفتن شرایط اولیه‌ی هم‌دوس برای این سیستم با الگوریتمی که در [۵] ارائه شده است، ماتریس ضرایب حالت به دست می‌آید. احتمال حضور سیستم در حالت‌های مختلف سطوح انرژی و مدهای کاواک برای سیستم به طور کامل محاسبه و رفتار آن مشاهده گردید. در این‌جا فقط نتایج مربوط به محاسبه‌ی مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای نابودی فوتونی و گذار اتمی به جهت رعایت اختصار آورده شده است. با استفاده از ماتریس ضرایب حالت به دست‌آمده در قسمت قبل معادله‌های زیر را برای مقادیر چشم‌داشتی عمل‌گرهای مذکور را به دست می‌آوریم. ذیلاً عمل‌گر نابودی فوتونی را برای تنها مد کاواک و عمل‌گر گذار اتمی را فقط برای یکی از نقاط کوانتومی (مثلاً دوم) ذکر می‌کنیم (زیرا کیفیت رفتار کلی گذار اتمی در همه‌ی نقاط کوانتومی تقریباً یکسان مشاهده گردید)

$$\langle \varphi(t)|\hat{a}_v|\varphi(t)\rangle = \sum_{r_1\ldots 7, r_8=g,e} \sum_{f_1=0}^{8} \sqrt{f_1}\,\phi^*(r_1,\cdots,r_8,f_1-1) \times \phi(r_1,\cdots,r_8,f_1) \qquad (۳)$$

$$\langle \varphi(t)|\hat{\sigma}^2_{g,e}|\varphi(t)\rangle = \sum_{r_{1,3,4,5,6,7,8}=g,e} \sum_{f_1=0}^{8} \phi^*(r_1,r_2\to g,r_3,\cdots,r_8,f_1) \times \phi(r_1,r_2\to e,r_3,\cdots,r_8,f_1) \qquad (۴)$$

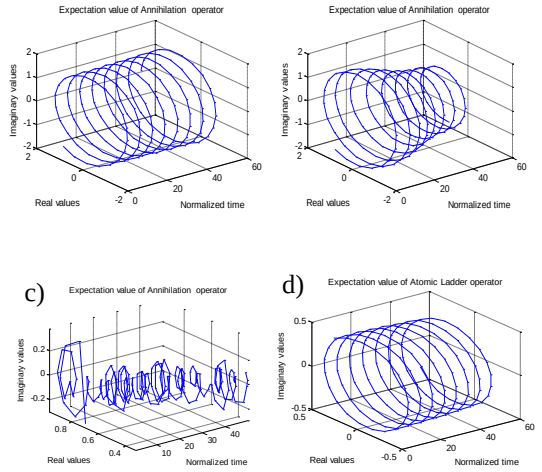
$\hat{a}_v$ عملگر نابودی فوتونی و $\hat{\sigma}^2_{g,e}$ عملگر گذار اتمی نقطه کوانتومی دوم در انتقال از تراز برانگیخته به پایه می‌باشد. شکل‌های ۲ و ۳ مقادیر به دست‌آمده در زمان را نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود رفتاری ظاهراً آشوبی با ورود به رژیم‌های تزویج بالاتر به وضوح دیده می‌شود (این مسئله در مورد تمامی سیستم‌های مورد تحلیل در [۵] هم نشان داده شده است). برای اینکه نشان دهیم فرض اولیه مبنی بر فقط در نظرگرفتن برهم‌کنش نقاط کوانتومی با نزدیک‌ترین همسایه خود صحیح است، برهم‌کنش با همسایه دوم را با مقدار شدت دوقطبی-دوقطبی با مرتبه کمتر هم تکرار کردیم که حاصل نتایج یکسان بود. به منظور نشان دادن میزان آشوب و اینکه ادعای خود مبنی بر وقوع پدیدی آشوب را به طور ریاضی اثبات کنیم، به محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف در مورد سیستم فوق پرداخته‌ایم که در ادامه آمده است.

۳- محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف K_2

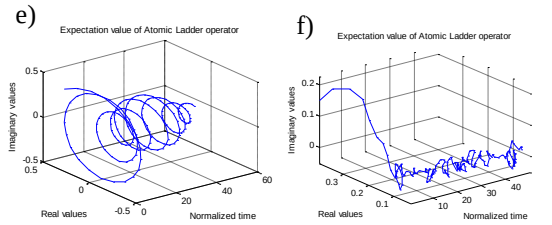
پس از محاسبه‌ی مقادیر چشم‌داشتی و مشاهده‌ی رفتار آن‌ها در زمان ظاهراً مشخص بود که رفتار سیگنال‌ها آشوبی است. اما نیاز به روشی بود که با استفاده از آن بتوان به سیگنال حاصل از مقادیر به دست آمده را خصوصیت‌دهی کرده و با اطمینان گفت که آیا رفتار آن از نظر ریاضی آشوب‌ناک است یا خیر. در [۱۶] نشان داده شده که محاسبه‌ی پارامتر آنتروپی کولموگروف مرتبه‌ی دو K_2 برای یک سیگنال شرطی کافی از میزان آشوب‌ناکی آن بدست می‌دهد، که مانند زیر تعریف می‌شود

$$K_{2,d}(\varepsilon) = \frac{1}{\tau}\ln\frac{C_d(\varepsilon)}{C_{d+1}(\varepsilon)} \qquad (۵)$$

در معادله‌ی (۵)، τ تقسیمات زمانی است که سیگنال مورد نظر در آن در حال تغییر است، که در محاسبات ما مقدار 0.1 برای زمان به‌هنجار شده لحاظ گردیده است. هم‌چنین داریم $C_d(\varepsilon)=\sum_i p_i^2$ که با استفاده از معادله‌ی زیر محاسبه و تعریف می‌گردد:



شکل ۲: چشم‌داشتی عملگر نابودی فوتونی در رژیم‌های تزویج ضعیف، قوی و بسیار قوی به ترتیب a و b و c. چشم‌داشتی عملگر گذار اتمی در رژیم‌های تزویج ضعیف d.



شکل ۳: چشم‌داشتی عملگر گذار اتمی در رژیم‌های تزویج قوی و بسیار قوی e و f.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-08]

$$C_d(\varepsilon)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\times\left[Num\left[\sum_{i=1}^{d}\left|X_{n+i}-X_{m+i}\right|^2\right]^{1/2}<\varepsilon\right] \quad (۶)$$

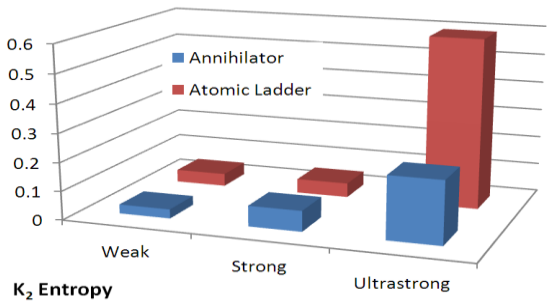
در رابطه‌ی فوق N تعداد نقاط نمونه‌برداری است که در آن تابع تغییر می‌کند. در این‌جا N را برابر ۱۵۰۰ در نظر گرفتیم؛ در محاسبه‌ی K_2 روش کار به این ترتیب است که دسته‌هایی از تابع در نظر گرفته می‌شود که تعداد اعضای این جعبه را d تعیین می‌کند. ε را مقادیر متفاوتی از 10^{-7} تا 10^{0} انتخاب کردیم. Num، آن جفت نقاطی هستند که مقادیر آن‌ها شرط $\sum_{i=1}^{d}\left|X_{n+i}-X_{m+i}\right|^2<\varepsilon^2$ را برآورده می‌سازند. مقدار صفر برای آنتروپی کولموگروف K_2 مبین رفتار کاملاً غیرآشوبی است. در حالی که برای یک سیگنال کاملاً تصادفی و فاقد اطلاعات (مانند نوفه‌ی سفید) آنتروپی کولموگروف K_2 به بی‌نهایت میل می‌کند. می‌توان نشان داد که در حقیقت هر مقدار متناهی و غیر صفر K_2 شرط کافی (و نه لازم) برای بروز رفتار آشوب‌ناک خواهد بود. اکنون با توجه با روابط (۵) و (۶) و استفاده از MATLAB مقدار آنتروپی K_2 را برای مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای نابودی فوتونی و گذار اتمی را محاسبه می‌کنیم. در شکل ۴، تغییرات آنتروپی K_2 محاسبه شده در رژیم‌های تزویج متفاوت آورده شده است. همانطور که کاملاً مشخص است مقادیر آنتروپی با افزایش شدت تزویج و ورود به رژیم‌های تزویج بالاتر افزایش یافته و سیستم آشوبی‌تر می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله شبیه‌سازی یک سیستم کوانتومی چندبخشی متشکل از هشت نقطه کوانتومی که به فرم زنجیره‌ای قرار گرفته‌اند و در برهم‌کنش با یک مدکاواک هستند، ارائه شد. هم‌چنین به محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف K_2 اقدام نمودیم، و با استفاده از آن توانستیم حضور رفتار آشوبی را در این سیستم نشان دهیم.

سپاس‌گذاری

بدین‌وسیله مولفین از کمک صندوق حمایت از پژوهش‌گران و فن‌آوران کشور طی طرح شماره‌ی ۸۹۰۰۱۳۲۹ تشکر می‌نمایند.



شکل ۴: محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف در رژیم‌های تزویج متفاوت.

مراجع

[1] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, 1st ed. Berlin: Wiley-VCH, 2001.

[2] S. Armstrong et al., "Programmable multimode quantum networks," *Nature Commun.*, vol. 3, no. 8, 1026, 2012.

[3] G. H. Booth, A. Grüneis, G. Kresse, A. Alavi, "Towards an exact description of electronic wavefunctions in real solids," *Nature*, vol. 493, pp. 365-370, 2013.

[4] J. Cai, A. Retzker, F. Jelezko, M. B. Plenio, "A large-scale quantum simulator on a diamond surface at room temperature," *Nature Phys.*, vol. 9, pp. 168–173, 2013.

[5] M. Alidoosty, M. H. Aram, S. Khorasani, "Simulation of Multipartite Cavity Quantum Electrodynamics," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 49, no. 12, pp. 1066-1079, 2013.

[6] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, "Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser," *Proc. IEEE*, vol. 51, no. 1, pp. 89-109, Jan. 1963.

[7] H. Paul, "Induzierte Emission bei starker Einstrahlung," *Ann. Phys.*, vol. 466, pp. 411-412, 1963.

[8] A. H. Sadeghi, A. Naqavi, and S. Khorasani, Interaction of "Quantum Dot Molecules with Multi-mode Radiation Fields," *Scientia Iranica*, vol. 17, pp. 59-70, 2010.

[9] E. Ahmadi, H. R. Chalabi, A. Arab, S. Khorasani, Cavity Quantum Electrodynamics in the Ultrastrong Coupling Regime, *Scientia Iranica*, vol. 18F(3), pp. 820-826, 2011.

[10] E. Ahmadi, H. R. Chalabi, A. Arab, S. Khorasani, "Revisiting the Jaynes-Cummings-Paul model in the limit of ultrastrong coupling," *Proc. SPIE*, vol. 7946, 79461W, 2011.

[11] F. Karimi and S. Khorasani, "Optical modulation by conducting interfaces," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 49, no. 7, pp. 607-616, 2013.

[12] M. Alidoosty Shahraki, S. Khorasani, and M. H. Aram, "Theory and simulation of cavity quantum electro-dynamics in multi-partite quantum complex systems," *Appl. Phys. A*, 2013, doi: 10.1007/s00339-013-8025-4.

[13] G. B. Lemos, R. M. Gomes, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and F. Toscano, "Experimental observation of quantum chaos in a beam of light," *Nature Commun.*, vol. 3, 1211, 2012.

[14] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hümmer, E. Solano, A. Marx, R. Gross, "Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime," *Nature Phys.*, vol. 6, pp. 772–776, 2010.

[15] M. Virte, K. Panajotov, H. Thienpont, M. Sciamanna, "Deterministic polarization chaos from a laser diode," *Nature Photon.*, vol. 7, pp. 60–65, 2013.

[16] P. Grassberger and I. Procaccia, "Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal," *Phys. Rev. A*, vol. 28, no. 4, pp. 2591-2593, 1983.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-08]