



لیف
پوتوکنفرانس
دینامیک کاواک

بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه ۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز



محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف در الکترودینامیک کوانتمی کاواک

مسلم علیدوستی شهرکی و سینا خراسانی

دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

چکیده - در این مقاله الکترودینامیک کوانتمی کاواک در سیستمی متشكل از هشت نقطه کوانتمی در برهم‌کنش با یک مد کاواک شبیه‌سازی و میزان آشوب مشاهده شده در این سیستم با استفاده از محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف در رژیم‌های تزویج متفاوت تخمین زده شده است. در سیستم مذکور فرض شده نقاط کوانتمی به شکل زنجیره‌ای خطی در کنار هم قرار گرفته‌اند، به نحوی که هر نقطه‌ی کوانتمی فقط با نقاط همسایه‌ی خود در برهم‌کنش است. نشان داده می‌شود که آنتروپی کولموگروف با شدت تزویج افزایش می‌یابد و در نتیجه سیستم مورد نظر آشوبناک خواهد بود.

کلید واژه- آشوب، آنتروپی کولموگروف، الکترودینامیک کوانتمی کاواک، سیستم‌های کوانتمی نوری

Calculation of Kolmogorov Entropy in Cavity Quantum Electrodynamics

Moslem Alidoosty Shahraki, Sina Khorasani

School of electrical engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Abstract- In this paper Kolmogorov entropy of a simulated cavity quantum electrodynamics in a multi-partite system consisting of eight quantum dots in interaction with one cavity mode has been estimated. It has been shown that the Kolmogorov Entropy monotonically increases with the increasing coupling strength, which is a sufficient condition for chaotic behavior under ultrastrong coupling regime. The arrangement of the quantum dots is assumed to be in the form of a linear chain where dipole-dipole interactions are considered only between the nearest neighbors.

Keywords: Chaos, Kolmogorov Entropy, Cavity Quantum Electrodynamics, Quantum Optics.

است اکنون ضمن نشان دادن کلیت شبیهسازی سیستم مذکور که در آن نحوی قرارگیری نقاط کوانتومی به فرم زنجیره‌ای استه جزئیات و چگونگی محاسبه‌ی آتروبی کولموگروف را در این سیستم ^{۱۵} ارائه خواهیم داد.

۲- شبیهسازی

در این قسمت ضمن معرفی سیستم مورد نظر به طور کلی روش شبیهسازی را براساس کارهای چاپ شده [۱۶] توضیح می‌دهیم. در این سیستم نُه بخشی همان‌طور که گفته شد، هشت نقطه‌ی کوانتومی همان‌طور که در شکل ۱ آمده است به صورت زنجیره‌ای خطی قرار گرفته‌اند. بدین ترتیب برهم‌کنش دوقطبی فقط برای هر دو نقطه‌ی کوانتومی مجاور در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه بسیاری از پارامترهای هامیلتونین توصیف کننده‌ی برهم‌کنش نقاط کوانتومی با یکدیگر حذف خواهند شد. ابتدا فضای حالت سیستم را بر اساس [۱۷] می‌نویسیم. این فضای حالت شامل کلیه‌ی حالات سطوح انرژی و مدهای کاواک در سیستم مورد نظر خواهد شد.



شکل ۱: قرارگیری سیستم‌های سطع کننده (نقاط کوانتومی) [۱۷].

معادله‌ی (۱) فضای حالت در این سیستم را بیان می‌کند.

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &= \sum_{r_1, \dots, r_8 = e.g. f=0}^8 \sum_{f=0}^8 \phi(A, f) |A\rangle |f\rangle \\ |A\rangle &= \otimes_{n=1}^8 |r_n\rangle = |1\rangle |2\rangle \dots |8\rangle \quad 1 \leq r_n \leq 2 \end{aligned} \quad (1)$$

$|A\rangle$ کت حالت سطوح انرژی مختلف سطع کننده‌های نور کوانتومی است. r_n سطح انرژی نقطه‌ی کوانتومی n ام است همچنین $|f\rangle$ کت حالت مدهای کاواک است. r_1 تنها مد کاواک در این سیستم است به طوری که حداقل تعداد فوتون‌های قرارگرفته در آن هشت عدد می‌باشد [۱۷]. هامیلتونین در این سیستم با توجه به [۱۷] به صورت معادله‌ی (۲) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{rr} + \hat{H}_{rE} \\ \hat{H}_0 &= \sum_i E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \hbar \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ \hat{H}_{rr} &= \sum_{n < m, i < j} (\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m) (\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m) \\ \hat{H}_{rE} &= \sum_{n, i < j} (\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) (g_{nij} \hat{a} + g_{nij}^* \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (2)$$

در (۲)، \hat{H}_0 انرژی سیستم را بدون هر گونه برهم‌کنشی بین

۱- مقدمه

اخیراً درهم‌تیدگی کوانتومی به یکی از موضوعات پیشرو و مورد علاقه تبدیل شده است دلیل این موضوع وجود کاربردهای بسیار متعدد بالغی است که این پدیده در مخابرات، اطلاعات و محلسبات کوانتومی دارد. الکترونیک کوانتومی کلواک یکی از لبه‌های دلش در این زمینه می‌باشد این شاخه‌ی اپتیک کوانتومی، برهم‌کش ملین سیستم‌های نوری کوانتومی و نور مخصوص شده در کلواک را مطالعه می‌کند [۱]. توانایی سوئیچ کردن ملین شبکه‌های نوری خطی در [۲] حاصل تولید حالت‌های درهم‌تیدی بسیار محدود می‌باشد بنابراین لازم است این سیستم‌ها به طور دقیق و کامل مورد بررسی قرار گیرند اما از آن جایی که ساخت و دسترسی به آن‌ها حداقل با توجه به تکنولوژی کنونی بسیار سخت استه امکان شبیهسازی این سیستم‌ها به صورت عددی ضروری می‌باشد اخیراً در [۳] امکان شبیهسازی سیستم‌های چندبخشی فراهم شده است که برای این دست از سیستم‌های کوانتومی از نظر محلسباتی در کل کاری بسیار مشکل است تهنا کار اینجا شده و قابل توجه در حد اطلاع تگارندگان در این ربطه که در آن شبیهسازی یک سیستم واقعی اجسام شده مذکور در [۴] می‌باشد اما مفید بودن استفاده از این سیستم‌های فیزیکی به وضوح با توجه به گسترده‌گی و نوع مسئله‌ی که با آن‌ها روبرو می‌شویم، محدود است در همین راسته، اخیراً موفق به ارائه شبیهسازی جملی شدیم که امکان مطالعه‌ی سیستم‌های کوانتومی چندبخشی دلخواه را فراهم نموده است [۱۷]. توانایی زیربنای این شبیهسازی بر اساس گسترش هامیلتونین جینس-کامینگر-پلول بوده و ارائه شده در [۱۷] می‌باشد این کار در [۸] با معرفی نمادگذاری و فرمول‌بندی جدیدی انجام شد و در ادامه‌ی آن اصلاحاتی در هامیلتونی فوکال‌ذکر انجام پذیرفته است [۹-۱۰].

در مرجع [۱۷] یک سیستم سطع کننده‌ی واقعی سه ترازه [۱۱] در برهم‌کنش با یک مود را شبیهسازی کردیم. همچنین برای اولین بار در [۱۷] امکان شبیهسازی یک سیستم کوانتومی پیچیده مشکل از شش نقطه‌ی کوانتومی در برهم‌کنش با یک مد کلواک فراهم شد در آخرین کار اینجا شده موفق به مطالعه‌ی یک سیستم کوانتومی چندبخشی و مشکل از هشت نقطه کوانتومی در برهم‌کنش با یک مد کلواک را به طور کمالاً دقیق در رژیمهای تزویج متغیر شبیهسازی نمودیم [۱۲] در این سیستم همان‌طور که بر اساس [۱۷] هم حبس می‌زدیم رفتار سیستم در تزویج بسیار قوی آشوبناک بوده که در اینجا با استفاده از محلسبه‌ی پلامتر آتروبی کولموگروف صحبت بروز پدیده‌ی رفتار آشوبی را نشان خواهیم داد.

تاکنون حضور آشوب در سیستم‌های نوری، مایکروپو و نانوفوتونیک [۱۳-۱۵] نشان داده شده است اما نحوی محاسبه‌ی آن تاکنون در مورد رفتار سیستم‌های کوانتومی چندبخشی و در حد اطلاع تگارندگان مطالعه نشده

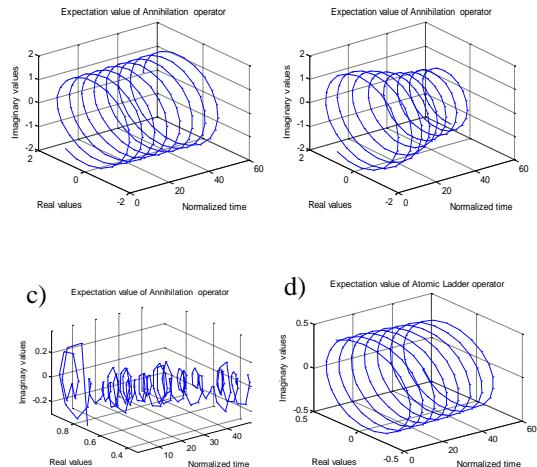
به محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف در مورد سیستم فوق پرداختهایم که در ادامه آمده است

۳- محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف K_2

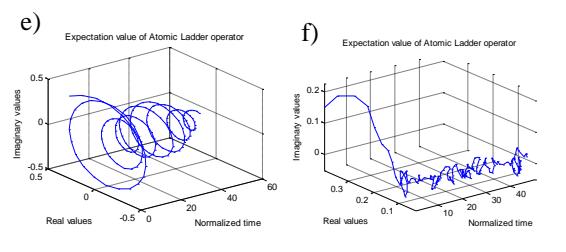
پس از محاسبه‌ی مقادیر چشم‌داشتی و مشاهده‌ی رفتار آن‌ها در زمان ظاهرآ مشخص بود که رفتار سیگنال‌ها آشوبی است، اما نیاز به روشنی بود که با استفاده‌ی آن بتوان به سیگنال حاصل از مقادیر به دست آمده را خصوصیت‌دهی کرده و بالطیان گفت که آیا رفتار آن از نظر ریاضی آشوبناک است یا خیر. در [۱۶] نشان داده که محاسبه‌ی پلاریتر آنتروپی کولموگروف مرتبه‌ی دو K_2 برای یک سیگنال شرطی کافی از میزان آشوبناکی آن بدنست می‌دهد که مانند زیر تعریف می‌شود

$$K_{2,d}(\varepsilon) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{C_d(\varepsilon)}{C_{d+1}(\varepsilon)} \quad (5)$$

در معادله‌ی (۵)، τ تقسیمات زمانی است که سیگنال مورد نظر در آن در حال تغییر است که در محاسبات ما مقام ۰.۱ برای زمان بهنجار شده لحاظ گردیده است. همچنان داریم $C_d(\varepsilon) = \sum_i p_i^2$ که با استفاده‌ی از معادله‌ی زیر محاسبه و تعریف می‌گردد



شکل ۲: چشم‌داشتی عملگر نابودی فotonی در رژیم‌های تزویج ضعیف، قوی و بسیار قوی به ترتیب a و b و c. چشم‌داشتی عملگر گذار اتمی در رژیم‌های تزویج ضعیف d.



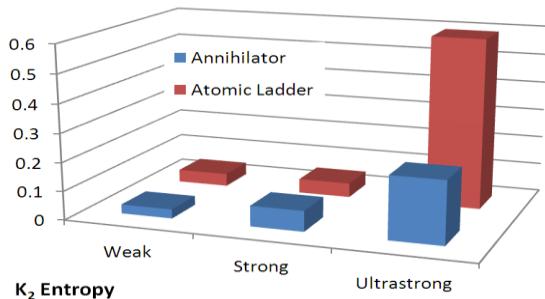
شکل ۳: چشم‌داشتی عملگر گذار اتمی در رژیم‌های تزویج قوی و بسیار قوی e و f.

می‌کند \hat{H}_{RE} مربوط به برهم‌کش نور و ساطع‌کننده است و \hat{H}_{RF} توصیف‌کننده برهم‌کش ملین هر دو ساطع‌کننده است. γ_{nij} المان‌های ماتریس عملگر دوقطبی ساطع‌کننده‌ی nام است شدت برهم‌کش دوقطبی ملین امیتر nام و مد ۷ام در انتقال از تراز اورژی نام به ظلم g_{nij} است. η_{nij} متناسب با شدت دوقطبی تولید شده هنگام متحمل شدن انتقال از تراز ظلم به ظلم است و بالآخره Eⁿ دلالت می‌کند به مقدار سطح اورژی nام ساطع‌کننده‌ی nام مقادیر عددی پلاریتها به طور کامل در [۱۲] آمده است. با توجه به تحلیل در رژیم‌های مختلفه مقداری در نظر گرفته شدمی متفاوتی برای g_{nij} که تعیین کننده‌ی رژیم تزویج می‌باشد در نظر گرفته شد اکنون با استفاده از معادله‌ی (۲) و عملکرد آن روی (۱) و با استفاده از حل معادله‌ی شرودینگر و در نظر گرفتن شرایط لولیه‌ی همدوس برای این سیستم با الگوریتمی که در [۱۵] ارائه شده است ماتریس ضرایب حالت به دست می‌آید احتمال حضور سیستم در حالت‌های مختلف سطح اورژی و مدهای کلوک برای سیستم به طور کامل محاسبه و رفتار آن مشاهده گردید. در اینجا فقط نتایج مربوط به محاسبه‌ی مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای نابودی فotonی و گذار اتمی به جهت رعایت اختصار آورده شده است. با استفاده از ماتریس ضرایب حالت به دست آمده در قسمت قبل معادله‌های زیر را برای مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای مذکور را به دست می‌آوریم. ذیلاً عمل گر نابودی فotonی را برای تنها مد کلوک و عمل گر گذار اتمی را فقط برای یکی از نقاط کوانتومی (مثلاً دوم) ذکر می‌کیم (زیرا کیفیت رفتار کلی گذار اتمی در همه نقاط کوانتومی تقریباً یکسان مشاهده گردید).

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_8 = g, e, f_1=0} \sum_{r_1, r_2, \dots, r_8, f_1=0}^8 \sqrt{f_1} \phi^*(r_1, \dots, r_8, f_1 - 1) \times \phi(r_1, \dots, r_8, f_1) \quad (3)$$

$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{g,e}^2 | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_8 = g, e, f_1=0}^8 \sum_{r_1, r_2 \rightarrow g, r_3, \dots, r_8, f_1}^8 \phi^*(r_1, r_2 \rightarrow g, r_3, \dots, r_8, f_1) \times \phi(r_1, r_2 \rightarrow e, r_3, \dots, r_8, f_1) \quad (4)$$

عملگر نابودی فotonی و $\hat{\sigma}_{g,e}^2$ عملگر گذار اتمی نقطه کوانتومی دوم در انتقال از تراز برانگیخته به پایه می‌باشد شکل‌های ۲ و ۳ مقادیر به دست آمده در زمان را نشان می‌دهند همان‌طور که مشاهده می‌شود رفتاری ظاهرآ اشوبی با ورود به رژیم‌های تزویج بالاتر به پوشح دیده می‌شود (این مسئله در مورد تملیم سیستم‌های مورد تحلیل در [۱۵] هم نشان داده شده است). برای اینکه نشان دهیم فرض اولیه مبنی بر فقط در نظر گرفتن برهم‌کش نقاط کوانتومی با نزدیکترین همسایه خود صحیح است، برهم‌کش با همسایه دوم را با مقاره شدت دوقطبی دوقطبی با مرتبه کمتر هم تکرار کردیم که حاصل نتایج یکسان بود به منظور نشان دادن میزان آشوب و اینکه ادعای خود مبنی بر وقوع پدیدی آشوب را به طور ریاضی اثبات کنیم.



شکل ۴: محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف در رژیم‌های تزویج متفاوت.

مراجع

- [1] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, 1st ed. Berlin: Wiley-VCH, 2001.
- [2] S. Armstrong et al., "Programmable multimode quantum networks," *Nature Commun.*, vol. 3, no. 8, 1026, 2012.
- [3] G. H. Booth, A. Grüneis, G. Kresse, A. Alavi, "Towards an exact description of electronic wavefunctions in real solids," *Nature*, vol. 493, pp. 365-370, 2013.
- [4] J. Cai, A. Retzker, F. Jelezko, M. B. Plenio, "A large-scale quantum simulator on a diamond surface at room temperature," *Nature Phys.*, vol. 9, pp. 168-173, 2013.
- [5] M. Alidoosty, M. H. Aram, S. Khorasani, "Simulation of Multiparticle Cavity Quantum Electrodynamics," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 49, no. 12, pp. 1066-1079, 2013.
- [6] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, "Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser," *Proc. IEEE*, vol. 51, no. 1, pp. 89-109, Jan. 1963.
- [7] H. Paul, "Induzierte Emission bei starker Einstrahlung," *Ann. Phys.*, vol. 466, pp. 411-412, 1963.
- [8] A. H. Sadeghi, A. Naqavi, and S. Khorasani, Interaction of "Quantum Dot Molecules with Multi-mode Radiation Fields," *Scientia Iranica*, vol. 17, pp. 59-70, 2010.
- [9] E. Ahmadi, H. R. Chalabi, A. Arab, S. Khorasani, Cavity Quantum Electrodynamics in the Ultrastrong Coupling Regime, *Scientia Iranica*, vol. 18F(3), pp. 820-826, 2011.
- [10] E. Ahmadi, H. R. Chalabi, A. Arab, S. Khorasani, "Revisiting the Jaynes-Cummings-Paul model in the limit of ultrastrong coupling," *Proc. SPIE*, vol. 7946, 79461W, 2011.
- [11] F. Karimi and S. Khorasani, "Optical modulation by conducting interfaces," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 49, no. 7, pp. 607-616, 2013.
- [12] M. Alidoosty Shahraki, S. Khorasani, and M. H. Aram, "Theory and simulation of cavity quantum electrodynamics in multi-particle quantum complex systems," *Appl. Phys. A*, 2013, doi: 10.1007/s00339-013-8025-4.
- [13] G. B. Lemos, R. M. Gomes, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and F. Toscano, "Experimental observation of quantum chaos in a beam of light," *Nature Commun.*, vol. 3, 1211, 2012.
- [14] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hümmer, E. Solano, A. Marx, R. Gross, "Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime," *Nature Phys.*, vol. 6, pp. 772-776, 2010.
- [15] M. Virte, K. Panajotov, H. Thienpont, M. Sciamanna, "Deterministic polarization chaos from a laser diode," *Nature Photon.*, vol. 7, pp. 60-65, 2013.
- [16] P. Grassberger and I. Procaccia, "Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal," *Phys. Rev. A*, vol. 28, no. 4, pp. 2591-2593, 1983.

$$C_d(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \times \left[\text{Num} \left[\sum_{i=1}^d |X_{n+i} - X_{m+i}|^2 \right]^{1/2} < \varepsilon \right] \quad (6)$$

در رابطه‌ی فوق N تعداد نقاط نمونه‌برداری است که در آن تابع تغییر می‌کند. در اینجا N را برابر ۱۵۰۰ در نظر گرفتیم؛ در محاسبه‌ی K_2 روش کار به این ترتیب است که دسته‌هایی از تابع در نظر گرفته می‌شود که تعداد اعضای این جعبه را d تعیین می‌کند. ε را مقادیر متفاوتی از 10^{-7} تا 10^0 انتخاب کردیم. آن جفت نقاطی هستند که مقادیر آن‌ها شرط $\sum_{i=1}^d |X_{n+i} - X_{m+i}|^2 < \varepsilon^2$ را برآورده می‌سازند. مقدار صفر برای آنتروپی کولموگروف K_2 می‌بین رفتار کاملاً غیرآشوبی است. در حالی که برای یک سیگنال کاملاً تصادفی و فاقد اطلاعات (مانند نویه‌ی سفید) آنتروپی کولموگروف K_2 به بینهایت میل می‌کند. می‌توان نشان داد که در حقیقت هر مقدار متنه‌ی و غیر صفر K_2 شرط کافی (و نه لازم) برای بروز رفتار آشوبناک خواهد بود. اکنون با توجه با روابط (۵) و (۶) و استفاده از MATLAB مقدار آنتروپی K_2 را برای مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای نابودی فوتونی و گذار اتمی را محاسبه می‌کنیم. در شکل ۴، تغییرات آنتروپی K_2 محاسبه شده در رژیم‌های تزویج متفاوت آورده شده است. همانطور که کاملاً مشخص است مقادیر آنتروپی با افزایش شدت تزویج و ورود به رژیم‌های تزویج بالاتر افزایش یافته و سیستم آشوبی‌تر می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله شبیه‌سازی یک سیستم کوانتومی چندبخشی متشکل از هشت نقطه کوانتومی که به فرم زنجیره‌ای قرار گرفته‌اند و در برهم‌کنش با یک مذکواک هستند، ارائه شد. همچنین به محاسبه‌ی آنتروپی کولموگروف K_2 اقدام نمودیم، و با استفاده از آن توانستیم حضور رفتار آشوبی را در این سیستم نشان دهیم.

سباس‌گذاری

بدین‌وسیله مولفین از کمک صندوق حمایت از پژوهش‌گران و فن‌آوران کشور طی طرح شماره‌ی ۸۹۰۰۱۳۲۹ تشکر می‌نمایند.