بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

رمبش امواج الکترومغناطیسی در پلاسما

جعفر برهانیان و فرخنده حسینی فرادنبه

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، صندوق پستی ۱۷۹، اردبیل، ایران

چکیده –با استفاده از روش اختلال کاهشی سیستم معادلات ماکسول-سیالی به تک معادله شرودینگر غیرخطی سه بعدی تقلیل پیدا می کند که بیانگر تحولات دامنه پتانسیل برداری در پلاسمای سرد نامغناطیده و بی برخورد است. بر پایه این مدل، امکان وقوع پدیده رمبش برای پالس الکترومغناطیسی با شکلهای گاوسی و سکانت هایپربولیک بررسی شده است.

کلید واژه- امواج الکترومغناطیسی، پلاسمای نامغناطیده، رمبش امواج

Collapse of Electromagnetic Wavesin Plasmas

Jafar Borhanian, Farkhondeh Hosseini Faradonbe

Department of Physics, Faculty of Science, University of MohagheghArdabili, P.O. Box 179, Ardabil, Iran

Abstract- A reductive perturbation method is used to reduce the system of Maxwell- Fluid equations into a single three-dimensional nonlinear Schrodinger equation describing the evolution of amplitude of vector potential in an unmagnetized collisionless cold plasma. Relying on this model the possibility of occurrence of collapse phenomena for Gaussian as well as sech-shaped electromagnetic pulse is addressed.

Keywords: Electromagnetic Waves, Unmagnetized Plasmas, Wave Collapse

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-01]

۱- مقدمه

برهمکنش بین پالس لیزری با پلاسما شاهد وقوع پدیده های غیرخطی متنوع و مهمی است. بعضی از این پدیده ها در مدل یک بعدی قابل بررسی است ولی بعضی از آنها فقط در قالب مدل هایی با درجات آزادی بیشتر قابل پیش بینی هستند[۱]. رمبش یک موج از جمله این پدیده ها است. اخیرا امکان وقوع این پدیده برای امواج الکترومغناطیسی در دو بعد نشان داده شده است [۲]. این مقاله در پی آن است که پدید رمبش امواج الکترومغناطیسی را در سه بعد بررسی کند.

۲- معادلات اساسی

دینامیک یک پالس الکترومغناطیسی در یک پلاسمای سرد نامغناطیده بی برخورد توسط مجموعه معادلات سیالی به همراه معادلات ماکسول قابل بررسی است، یعنی

$$\nabla^2 A-\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\phi+\frac{n}{\gamma}\vec{P}=0 \qquad (۱)$$

$$\nabla^2\phi=n-1 \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\vec{\nabla}.(\frac{n}{\gamma}\vec{P})=0 \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{P}-\vec{A})=\vec{\nabla}(\phi-\gamma)+\frac{1}{\gamma}\vec{P}\times\vec{\nabla}\times(\vec{P}-\vec{A}) \qquad (۴)$$

$$\gamma=\sqrt{1+P^2} \qquad (۵)$$

که در آن $\vec{P}$ اندازه حرکت ، n چگالی الکترونها، γ فاکتورنسبیتی، $\vec{A}$و ϕبه ترتیب پتانسیلهای برداری و اسکالر هستند. در این معادلات پتانسیلها با mc^2/e، چگالی الکترون با چگالی زمینه n_0، سرعت الکترون با سرعت نور c بی بعد شده اند. فرض می کنیم تمام کمیات فیزیکی وابسته به $\vec{r}=(x,y,z)$ بوده و پالس لیزری در امتداد محور z منتشر شود

۳- معادله شرودینگر غیرخطی سه بعدی

اکنون می خواهیم معادلات (۱) – (۵) را با استفاده از روش اختلال [۳] مورد بررسی قرار دهیم. اگر فرض کنیم $\mathbf{S}=(n,\phi,\vec{A},\vec{P})$ حالت سیستم را در زمان t و مکان $\vec{r}$ نشان دهد، آنگاه با تعریف متغیرهای کشیده شده $\vec{R}_m=(X_m,Y_m,Z_m)=\varepsilon^m\vec{r}$ و $T_m=\varepsilon^m t$ که $m=0,1,...$، بردار حالت را به صورت زیر بسط می دهیم

$$S=S^{(0)}+\sum_{n=-\infty}^{n}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varepsilon^n s_l^{(n)}(R_m\geq 1,T_m\geq 1)e^{il(kz-\omega t)} \qquad (۶)$$

که در آن $S^{(0)}=(1,0,\vec{0},\vec{0})$ بیانگر حالت تعادل سیستم بوده و ε یک پارامتر کوچک می باشد. همچمین ، k,ω به ترتیب فرکانس وعدد موج مرکزی پالس هستند. اکنون باید رابطه (۶) را در معادلات (۱) – (۵) قرار داده و با متحد قرار دادن معادلات در مرتبه های مختلف n دینامیک هارمونیکهای مختلف را بررسی کرد. جزئیات در جای دیگر بحث شده است [۴] و فقط به گزارش نتایج بسنده می کنیم. مهمترین نتیجه در مرتبه اول $(n=1)$ ظاهر شدن رابط پاشندگی خطی $\omega^2-k^2=1$ است. در مرتبه دوم ($n=2$) رابطه زیر را بدست می آوریم

$$\frac{\partial\psi_{1,2}}{\partial T_1}+v_g\frac{\partial\psi_{1,2}}{\partial Z_1}=0 \qquad (۷)$$

که در آن $v_g=\omega/k$ بیانگر سرعت گروه بوده و $A_{x1}^{(1)}=\psi_1,\ A_{y1}^{(1)}=\psi_2$ تعریف شده است. همچنین داریم

$$p_{z1}^{(2)}=A_{z1}^{(2)}=\frac{i}{k}(\frac{\partial\psi_1}{\partial X_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial Y_1}) \qquad (۸)$$

که بیانگر ایجاد هارمونیک اول برای کمیات طولی در مرتبه دوم است. و همچنین داریم

$$\phi_2^{(2)}=-\frac{1}{4k\omega}p_{z_2}^{(2)}=-\frac{1}{4k^2}n_2^{(2)}=\frac{\psi_1^2+\psi_2^2}{8\omega^2-2} \qquad (۹)$$

و در نهایت معادلات مربوطه در مرتبه بعدی ($n=3$) و برای قطبش دایروی (خطی) $\psi_2=\pm i\psi_1$ ($\psi_2=0$) منجر به معادله زیر می شود

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\alpha(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_1{}^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_2{}^2})+\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_3{}^2}+\lambda|\psi|^2\psi=0 \qquad (۱۰)$$

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-01]

که در آن $\alpha = 1/2\omega$ ضریب پراش، $\beta = 1/2\omega^3$ ضریب پاشندگی و $\lambda_1 = 3\lambda_2 = 3/4\omega$ ضریب غیر خطیت است. به عبارت دیگر $\lambda = q/4\omega$ که برای قطبش دایروی (خطی) $q = 2$ $(q = 3)$ می باشد. معادله (۱۰) بیانگر اثر متقابل بین پراش، غیر خطیت و پاشندگی می باشد.

۴- رمبش موج

اثر متقابل بین غیرخطیت، خودکانونگی، پراش و پاشندگی که توسط معادله (۱۰) بیان می شود می تواند منجر به ایجاد ساختارهای جایگزیده سه بعدی شود. وقتی محیط دارای پاشندگی غیرعادی باشد که در اینجا همینطور است (وقتی ضریب پاشندگی $\beta > 0$ باشد، پاشندگی را غیر عادی گویند) آنگاه امکان بوجود آمدن پرتو های جایگزیده و رمبش موج وجود خواهد داشت [۵]. برای مطالعه این پدیده با معرفی متغیرهای جدید $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv (\xi_1/\sqrt{\alpha}, \xi_2/\sqrt{\alpha}, \xi_3/\sqrt{\beta})$ معادله (۱۰) به شکل زیر ساده می شود

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_3^2} + \lambda|\psi|^2\psi = 0 \qquad (۱۱)$$

برای جوابهایی با تقارن شعاعی معادله فوق به صورت زیر در می آید

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \lambda|\psi|^2\psi = 0 \qquad (۱۲)$$

می توان نشان داد که لاگرانژی متناظر با معادله (۱۲) چنین است

(۱۳)

$$L = \frac{i}{2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)r^2 + r^2\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|^2 - \frac{1}{2}\lambda r^2|\psi|^4$$

اکنون با تعریف دو نوع تابع آزمون یکی به شکل سکانت هایپربولیک و دیگری به شکل پرتو گاوسی، یعنی

$$\psi(r,\tau) = \rho(\tau)\mathrm{sech}\left(\frac{r}{w(\tau)}\right)\exp[ib(\tau)r^2] \qquad (۱۴)$$

$$\psi(r,\tau) = \rho(\tau)\exp\left[-\frac{r^2}{2w(\tau)^2} + ib(\tau)r^2\right] \qquad (۱۵)$$

با تعریف لاگرانژین کاهش یافته به صورت زیر

$$\langle L\rangle = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} L\,d\xi = iw^3 f_1\left(\rho\frac{d\rho^*}{d\tau} - \rho^*\frac{d\rho}{d\tau}\right) + f_2 w^5|\rho|^2\left(\frac{db}{d\tau} + 4b^2\right) + f_3 w|\rho|^2 - \lambda w^3 f_4|\rho|^4 \qquad (۱۶)$$

که در آن ضرایب f_j برای پرتو سکانت هایپربولیک برابر

$$f_1 = \frac{\pi^2}{24},\quad f_2 = \frac{7\pi^4}{240},\quad f_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\pi^2}{12}\right),\quad f_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{2}{3}\right) \qquad (۱۷)$$

و برای پرتو گاوسی نیز به صورت زیر تعریف شده اند

$$f_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{8},\quad f_2 = f_3 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8},\quad f_4 = \frac{\sqrt{2\pi}}{32} \qquad (۱۸)$$

با وردش لاگرانژی (۱۶) و انجام عملیات جبری داریم

$$|\rho|^2 w^2 = |\rho_0|^2 w_0^3 = I_0;\ b = \frac{1}{4}\frac{d}{d\tau}\ln w \qquad (۱۹)$$

که ρ_0 و w_0 به ترتیب شعاع ودامنه اولیه پرتو می باشند.با معرفی متغیرهای جدید $\tilde{w} = w/w_0$ و $\tilde{\tau} = (4f_3/f_2 w_0^4)\tau$ معادله تحول شعاع پرتو چنین است

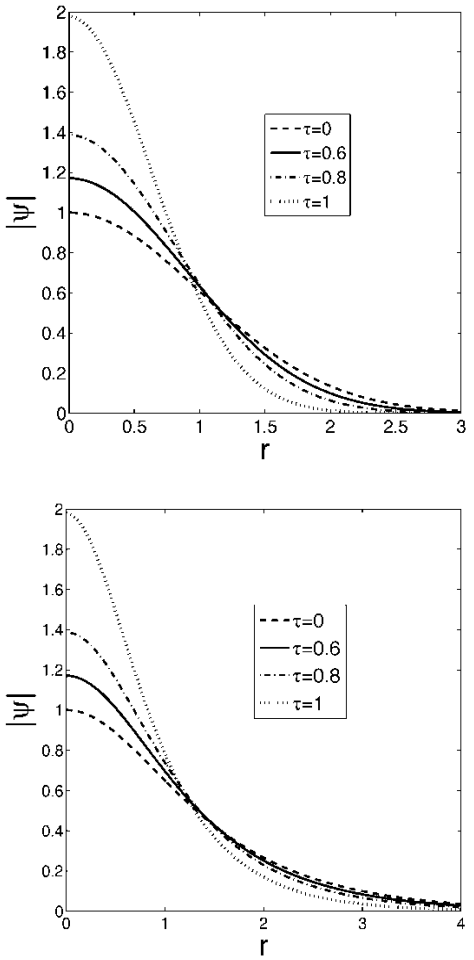
$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} - \frac{1}{w} + \frac{a}{w^4} = 0 \qquad (۲۰)$$

که در آن $a = 3qf_4P_p/4f_3\omega$ و P_p توان پالس می باشد. با در نظر گرفتن $\rho = |\rho|\exp(i\Theta)$ معادله حاکم بر Θ نیز چنین خواهد بود

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = \frac{e_1}{w^3} + \frac{e_2}{w^2} \qquad (۲۱)$$

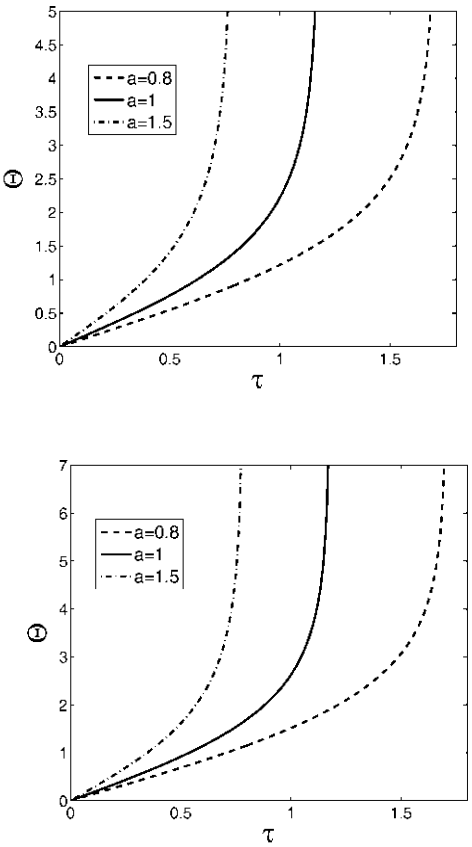
معادلات (۲۰) و (۲۱) با استفاده از روش رانگ- کوتای مرتبه چهار حل شده اند و نتیجه در شکلهای ۱ و ۲ به نمایش گذاشته شده است. (در این شکلها واحدها بی بعد هستند). از شکل ۱ پیدا است که با گذشت زمان دامنه پرتو رو به افزایش می گذارد در حالیکه شعاع پرتو (به عبارت دقیقترFWHM پرتو) کاهش پیدا می کند. این وضعیت دقیقا متناظر با رمبش پالس الکترومغناطیسی در پلاسما است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-01]



شکل ۱ : تغییرات نمایه پرتو گاوسی (چهارچوب بالا) و پرتو سکانت هایپربولیک (چهارچوب پایین) در زمانهای مختلف برای $a=1$

در شکل ۲ تغییرات زمانی جابجایی غیرخطی فاز Θ به نمایش گذاشته شده است. این جابجایی فاز در اثر وابستگی ضریب شکست به شدت پالس بوجود می آید. از شکل ۲ آشکار می شود که هم برای پالس گاوسی و هم برای پالس سکانت هایپربولیک شیب تغییرات زمانی جابجایی غیرخطی فاز مثبت است. در نتیجه فرکانس مرکزی پالس متحمل جابجایی آبی (Blue shift) خواهد شد. این نوع جابجایی در نتایج تجربی حاصل از برهمکنش لیزر و پلاسما مشاهده شده است [۶].



شکل ۲: تحول زمانی جابجایی فاز پرتو گاوسی (چهارچوب بالا) و پرتو سکانت هیپربولیک (چهارچوب پایین).

نتیجه گیری

نشان داده شد که معادلات سیالی و ماکسولی منجر به تک معادله شرودینگر غیرخطی ۳ بعدی شد. همچنین تولید هارمونیک اول مولفه های طولی پتانسیل برداری و اندازه حرکت از نتایج مهمی است که در مدل یک بعدی دیده نشده است. با استفاده از روش وردشی امکان رمبش پرتو الکترومغناطیسی با نمایه های گاوسی و سکانت هایپربولیک پیش بینی شده است.

مراجع

[1] Zakharov, V. E., and Kuznetsov, E. A., *Phys. Usp.* 55, 535 (2012)
[2] Borhanian, J., *Phys. Plasmas* 20, 042115 (2013).
[3] Taniuti, T. and Yajima, N., *J. Math. Phys.* 10, 1369 (1969)
[4] Borhanian, J., Kourakis, I., and Sobhanian, S., *Phys. Lett. A.*373, 3667 (2008)
[5] Silberberg, Y., *Opt. Lett.* 15, 1282 (1990)
[6] Watts, W. M., et. al., *Phys. Rev. E* 66, 036409 (2002)

[Downloaded from opsi.ir on 2026-02-01]