



بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران  
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران  
۸ تا ۱۰ بهمن ماه ۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز



## دیسکورد کوانتومی دو اسپین با برهم کنش هایزنبرگ در حضور میدان کوانتیزه

فرشته عبدلی و مهدی میرزایی

دانشگاه اراک، دانشکده علوم، گروه فیزیک، کد پستی ۳۸۱۵۶-۸-۸۳۴۹

چکیده - در این تحقیق با استفاده از رهیافت دیسکورد کوانتومی به بررسی مدلی شامل برهم کنش هایزنبرگ دو اسپین در حضور میدان کوانتیزه تحت تقریب موج دوار می پردازیم. در این راستا ضمن بررسی شرایط ذکر شده در محاسبه دیسکورد کوانتومی عملگر اندازه گیری بهینه را محاسبه کرده و سپس نتایج بدست آمده را از نظر فیزیکی مطالعه می نماییم.

کلید واژه- برهم کنش کوانتومی اسپین و فوتون، دیسکورد کوانتومی، زنجیره اسپینی.

## Quantum discord of Heisenberg spin model with quantized field

Fereshteh Abdeli, Mahdi Mirzaee

Department of Physics, Faculty of Science, Arak University, Arak 38156-8-8349, Iran

Abstract- In this paper we try to describe the interaction of the Heisenberg spin model with quantized field using quantum discord under the rotating wave approximation. In this view, using the proposition in quantum discord we obtain the optimized operator. Then we study the physical properties of this model and compare the results with the similar ones.

Keywords: Photon-spin interaction, Quantum Discord, Spin Chain.

## ۱- مقدمه

محاسبه ی برهم کنش کوانتومی در سال های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. مدت ها اعتقاد بر این بود که برهم کنش کوانتومی را می توان با استفاده از درهمتنیدگی کوانتومی تشخیص داد ولی در ادامه حالت هایی به دست آمد که درهمتنیدگی در آن ها صفر بود ولی در ارسال کوانتومی مورد استفاده قرار گرفت. پس به نظر می رسد درهمتنیدگی معیار مناسبی برای تشخیص برهم کنش کوانتومی نمی باشد [1]. اخیرا معیاری به نام دیسکورد کوانتومی (اختلاف کوانتومی) [1,2] جهت تشخیص برهم کنش کوانتومی معرفی شده است که به نظر می رسد معیار مناسبی برای تشخیص همبستگی کلاسیکی باشد. همبستگی کل که شامل همبستگی کلاسیکی و کوانتومی می باشد مطابق رابطه ی زیر تعریف می شود [1]:

$$(1) I(\rho_{A:B}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$$

که  $S(\rho_A)$  انترپوی زیر سیستم A و  $S(\rho_B)$  انترپوی زیر سیستم B و  $S(\rho_{AB})$  انترپوی مشترک بین دو زیر سیستم A و B است که از رابطه ی زیر به دست می آید [1]:

$$(2) S(\rho_{AB}) = -\text{tr}(\rho_{AB} \log \rho_{AB})$$

$\rho_{AB}$  ماتریس چگالی دو زیرسیستم A و B است  $\rho_A$  و  $\rho_B$  ماتریس های چگالی کاهش یافته زیر سیستم های A و B هستند که با استفاده از رابطه ی زیر به دست می آیند [3]:

$$(3) \rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB}) \quad \text{و} \quad \rho_B = \text{tr}_A(\rho_{AB})$$

همبستگی کلاسیکی هم به صورت زیر بیان می گردد [1]:

$$(4) \tilde{J}_A(\rho_{AB}) = S(\rho_B) - \min_{\{E_k^A\}} \sum_k p_k S(\rho_{B|k})$$

حال همبستگی کوانتومی از تفاضل همبستگی کلی و همبستگی کلاسیکی به صورت زیر به دست می آید [1]:

$$(5) \tilde{D}_A(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - \tilde{J}_A(\rho_{AB})$$

با نگاهی به رابطه فوق و عمل بهینه سازی متوجه می شویم که انجام محاسبات فوق کار ساده ای نیست و نیاز به محاسبات پیچیده ی ریاضی دارد. در سال های اخیر روشی آسان برای محاسبه ی اختلاف کوانتومی برای زیرمجموعه ی خاصی از حالات کوانتومی به نام حالات X ارائه شده است [1]. طبق تعریف یک حالت X به صورت

زیر تعریف می شود [1]:

$$(6) X = \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & \rho_{03} \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 \\ 0 & \rho_{12}^* & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{03}^* & 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix}$$

مطابق این قضیه اندازه گیری بهینه برای اختلاف کوانتومی از یک حالت X بسته به شرایط به صورت زیر بیان می شود [1]:

$$(7)$$

$$\sigma_z^A \text{ if } (|\rho_{12}| + |\rho_{03}|)^2 \leq (\rho_{00} - \rho_{11})(\rho_{33} - \rho_{22})$$

(A)

$$\sigma_x^A \text{ if } |\sqrt{\rho_{00}\rho_{33}} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}| \leq |\rho_{12}| + |\rho_{03}|$$

همانطور که مشخص می باشد با بررسی شرط فوق دیگر نیازی به روشهای بهینه سازی نیست.

## ۲- برهم کنش مبادله ای هایزبرگ دو اسپین در حضور میدان کوانتیزه

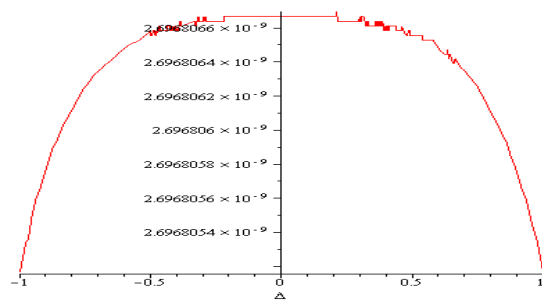
حال با توجه به قضیه ای که این جا مطرح شد به بررسی مدل فیزیکی شامل سیستمی متشکل از دو اسپین با برهم کنش مبادله ای هایزبرگ در حضور میدان کوانتیزه بایک مد تحت تقریب موج دوار می پردازیم که به صورت زیر تعریف می گردد [2]:

$$(9)$$

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2} (\sigma_1^z + \sigma_2^z) + \Omega [a(\sigma_1^+ + \sigma_2^+) + a^\dagger(\sigma_1^- + \sigma_2^-)] + J_x \sigma_1^x \sigma_2^x + J_y \sigma_1^y \sigma_2^y + J_z \sigma_1^z \sigma_2^z$$

که  $\omega$  فرکانس گذار بین ویژه حالت هایی با اسپین 1/2 است و  $\nu$  فرکانس میدانی است که بر حسب عملگرهای خلق و فنا ی  $a$  و  $a^\dagger$  توصیف می شود. همچنین  $\Omega$  ثابت کوپلاژ بین میدان و ذرات می باشد که به فرکانس رابی مشهور است.  $J_x, J_y, J_z$  ثابت های کوپلاژ مبادله ای بین دو

ذره با اسپین 1/2 است.  $\sigma_i^\pm = \sigma_i^x \pm i\sigma_i^y$  ماتریس های پائولی با  $i=1, 2$  هستند. نمایش ماتریسی هامیلتونی فوق در پایه ویژه حالات ماتریس های پائولی به شکل زیر نوشته می شود [2]:



شکل ۱: بررسی شرایط قضیه در مرجع [۳] به ازای مقادیر  $v=0.5$ ,  $j=-1$ ,  $t=0.2$ ,  $n=1$ ,  $j_z=0.8$  شکل بالا در ارتباط با رابطه (۷) و شکل پایین بررسی رابطه (۸) می باشد.

حال با استفاده از ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس (11) به ازای  $\Omega=0$ ، ماتریس چگالی گرمایی را مطابق رابطه زیر بدست می آوریم [4]:

$$\rho = Z^{-1} \sum_{i=1}^4 \exp(-\beta E_i) |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (12)$$

که در این رابطه  $Z$  تابع پارش،  $\beta$  ثابت بولتزمن  $(\beta = \frac{1}{k_B T})$ ،  $E_i$  ها ویژه مقادیر و  $|\Psi\rangle$  ها ویژه حالات هامیلتونی ذکر شده با  $\Omega=0$  است. با توجه به ماتریس حالت  $X$  بیان شده، ماتریس چگالی  $\rho(T)$  یعنی گرمایی) به صورت زیر به دست می آید [5]:

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad (13)$$

عناصر این ماتریس چگالی را با حالت  $X$  بیان شده مقایسه می کنیم داریم:

$$\begin{aligned} \rho_{03} &= 0 \text{ و } \rho_{00} = a = 1/Z e^{-1/T(J_z + \Delta + m + v)} \\ \rho_{11} &= b = 1/Z e^{-1/T(-J_z + v + m)} (2 \cosh 2J/T) \\ \rho_{12} &= c = 1/Z e^{-1/T(-J_z + v + m)} (-2 \sinh 2J/T) \\ \rho_{12}^* &= d = 1/Z e^{-1/T(-J_z + v + m)} (-2 \sinh 2J/T) \\ \rho_{22} &= e = 1/Z e^{-1/T(-J_z + v + m)} (2 \cosh 2J/T) \\ \rho_{03}^* &= 0 \text{ و } \rho_{33} = f = 1/Z e^{-1/T(-\Delta + J_z + v + m)} \end{aligned}$$

با بررسی دو شرط در قضیه ی بیان شده به جای  $E_k^A$  یا  $\sigma_x^A$  قرار می گیرید یا  $\sigma_z^A$ ، نتیجه ی به دست

$$H = \begin{pmatrix} \Delta + v(n+1) + J_z & \Omega\sqrt{n+1} & \Omega\sqrt{n+1} & 0 \\ \Omega\sqrt{n+1} & v(n+1) - J_z & 2J & \Omega\sqrt{n+2} \\ \Omega\sqrt{n+1} & 2J & v(n+1) - J_z & \Omega\sqrt{n+2} \\ 0 & \Omega\sqrt{n+2} & \Omega\sqrt{n+2} & -\Delta + v(n+1) + J_z \end{pmatrix} \quad (10)$$

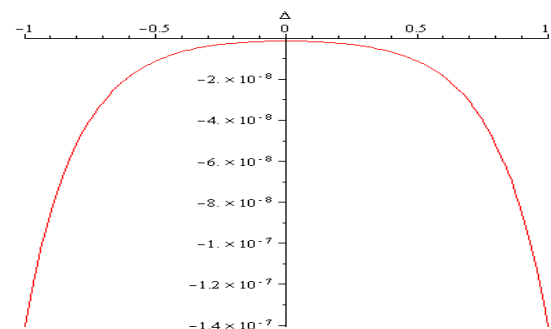
که  $n$  تعداد فوتون ها و  $\Delta$  فرکانس تنظیم است. اگر در این هامیلتونی  $\Omega=0$  باشد خواهیم داشت [2]:

$$H = \begin{pmatrix} \Delta + v(n+1) + J_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v(n+1) - J_z & 2J & 0 \\ 0 & 2J & v(n+1) - J_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta + v(n+1) + J_z \end{pmatrix} \quad (11)$$

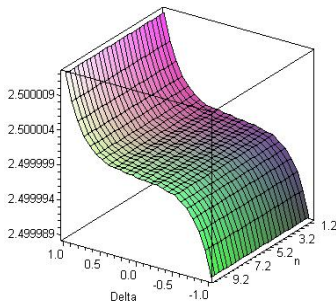
### ۳- دیسکورد کوانتومی بر هم کنش اسپین-فوتون

اکنون با استفاده از هامیلتونی فوق به بررسی و محاسبه ی اختلاف کوانتومی می پردازیم. همان طور که در بالا اشاره شد در محاسبه ی این کمیت در حالت کلی دچار مشکل هستیم به همین دلیل با استفاده از قضیه ی مطرح شده این کمیت را محاسبه می کنیم. همان طور که دیدیم برای محاسبه در ابتدا باید به بررسی دو شرط مطرح شده بپردازیم. با بررسی دو نمودار شکل (1) می بینیم که رابطه (8) برقرار است به طوریکه نمودار با انتخاب  $v=0.5$ ،  $j=-1$ ،  $j_z=0.8$ ،  $n=1$ ،  $t=0.2$  به ازای

مقادیر  $\Delta$  همواره مثبت می باشد.



$$Q(\rho) = ((-a/Z - e/Z) \log(a/Z + e/Z) + (-b/Z - f/Z) \log(b/Z + f/Z) + (-a/Z - e/Z) \log(a/Z + e/Z) + (-b/Z - f/Z) \log(b/Z + f/Z) - (-a/Z) \log(a/Z) + (-f/Z) \log(f/Z) + (-b/(2Z) - e/(2Z) - 1/(2Z)) \sqrt{(b^2 - 2be + e^2 + 4dc)} \log((b/2Z) + e/(2Z)) + 1/(2Z) \sqrt{(b^2 - 2be + e^2 + 4dc)})) + (-b/(2Z) - e/(2Z) + 1/(2Z)) \sqrt{(b^2 - 2be + e^2 + 4dc)} \log((b/2Z) + e/(2Z) - 1/(2Z)) \sqrt{(b^2 - 2be + e^2 + 4dc)}))$$



شکل ۲: اختلاف کوانتومی به ازای مقادیر:  $t = 0.2, j_z = 0.8, j = -1, \nu = 0.5$  را نشان می دهد که همواره مقدار آن مثبت است و بازه تغییرات  $\Delta$  از ۱- تا ۱+ است.

#### ۴- نتیجه گیری

با انجام محاسبات و رسم نمودار مشاهده شد که با افزایش  $\Delta$  درهمتنیدگی افزایش می یابد ولی جهت گیری آن متفاوت است در بازه ی ۰ تا ۱ و ۱- سمت و سوی آن متفاوت است.

#### مراجع

- [1] Chen, Qing, *Quantum discord of two-qubit X-states*, Phys. Rev. A p.84, 2011.
- [2] Liang, Jiu Qing and Chen, Guanrong, *Quantum phase transition of entanglement in Heisenberg spin model with quantized field*, Eur. Phys. J. D 39, p.313-320, 2006.
- [3] Chen, Xiao, *Quantum Entanglement and Thermal Reduced Density Matrices in Fermion and Spin Systems on Ladders*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment Vol 8/P. 08013, 2013.
- [4] Rong, Chen Shi and Jie, Xia Yun and Xiao, Man Zhong, *Quantum phase transition and entanglement in Heisenberg XX spin chain with impurity*, Chin. Phys. B Vol. 19, No. 5, 2010.
- [5] Yue, Rui-Hong, *Impurity in Pairwise Entanglement of Heisenberg XX Open Chain*, Commun. Theor. Phys. 48, p.1009-1016, 2007.

آمده همان طور که دیدیم این است که در محاسبات از  $\sigma_x^A$  استفاده کنیم. رابطه ی  $p_k$  را می توان به شکل زیر نوشت [1]:

$$(14) \quad p_k = \text{tr} \left( (\sigma_x^A \otimes I) \rho (\sigma_x^A \otimes I) \right)$$

که I ماتریس واحد است همچنین برای  $\rho_{B|k}$  داریم [1]:

$$(15) \quad \rho_{B|k} = \text{tr}_A \left( (\sigma_x^A \otimes I) \rho (\sigma_x^A \otimes I) \right) / p_k$$

در نهایت ماتریس  $p_k$  را به شکل زیر به دست آوردیم:

$$(16) \quad p_k = \text{tr} \left[ \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & d \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ c & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \right] = 1$$

با توجه به شرط واحد بودن رد ماتریس چگالی مقدار  $p_k$  برابر ۱ بدست می آید. حال به محاسبه ی  $\rho_{B|k}$  می پردازیم که در نهایت به این جواب رسیدیم:

$$(17)$$

$$\rho_{B|k} = (a/Z + e/Z) |0\rangle\langle 0| + (b/Z + f/Z) |1\rangle\langle 1|$$

انترپوی  $\rho_{B|k}$  را از رابطه (۲) به دست می آوریم که به صورت زیر است:

$$(18) \quad S_{\rho_{B|k}} = \left( -\frac{a}{Z} - \frac{e}{Z} \right) \log \left( \frac{a}{Z} + \frac{e}{Z} \right) + \left( -\frac{b}{Z} - \frac{f}{Z} \right) \log \left( \frac{b}{Z} + \frac{f}{Z} \right)$$

$\rho(T)$  را مساوی با  $\rho_{AB}$  می گیریم و  $\rho_A$  و  $\rho_B$  را به دست می آوریم.

$$(19) \quad \rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB}) \quad \rho_B = \text{tr}_A(\rho_{AB})$$

با استفاده از روابط بالا انترپوی  $\rho_A$  و  $\rho_B$  را محاسبه می کنیم: (20)

$$S(\rho_B) = \left( -\frac{a}{Z} - \frac{e}{Z} \right) \log \left( \frac{a}{Z} + \frac{e}{Z} \right) + \left( -\frac{b}{Z} - \frac{f}{Z} \right) \log \left( \frac{b}{Z} + \frac{f}{Z} \right)$$

$S(\rho_A)$  در محاسبات ساده می شود. حال با استفاده از نتایج فوق به محاسبه ی اختلاف کوانتومی  $Q(\rho)$  می پردازیم: (21)

$$(21) \quad Q(\rho) = S(\rho_B) + S(\rho_{B|k}) - S(\rho_{AB})$$