بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

دیسکورد کوانتومی دو اسپین با برهم کنش هایزنبرگ در حضور میدان کوانتیزه

فرشته عبدلی و مهدی میرزایی

دانشگاه اراک، دانشکده علوم، گروه فیزیک، کد پستی ۸۳۴۹-۸-۳۸۱۵۶

چکیده – در این تحقیق با استفاده از رهیافت دیسکورد کوانتومی به بررسی مدلی شامل بر هم کنش هایزنبرگ دو اسپین در حضور میدان کوانتیزه تحت تقریب موج دوار می پردازیم. در این راستا ضمن بررسی شرایط ذکر شده در محاسبه دیسکورد کوانتومی عملگر اندازه گیری بهینه را محاسبه کرده و سپس نتایج بدست آمده را از نظر فیزیکی مطالعه می نماییم.

کلید واژه- برهم کنش کوانتومی اسپین و فوتون، دیسکورد کوانتومی، زنجیره اسپینی.

Quantum discord of Heisenberg spin model with quantized field

Fereshteh Abdeli, Mahdi Mirzaee

Department of Physics, Faculty of Science, Arak University, Arak 38156-8-8349, Iran

Abstract- In this paper we try to describe the interaction of the Heisenberg spin model with quantized field using quantum discord under the rotating wave approximation. In this view, using the proposition in quantum discord we obtain the optimized operator. Then we study the physical properties of this model and compare the results with the similar ones.

Keywords: Photon-spin interaction, Quantum Discord, Spin Chain.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-30]

۱- مقدمه

محاسبه ی برهم کنش کوانتومی در سال های اخیر مورد توجه قرار گرفته است.مدت ها اعتقاد بر این بود که برهم کنش کوانتومی را می توان با استفاده از درهمتنیدگی کوانتومی تشخیص داد ولی در ادامه حالت هایی به دست امد که درهمتنیدگی در آن ها صفر بود ولی در ارسال کوانتومی مورد استفاده قرار گرفت.پس به نظر می رسد درهمتنیدگی معیار مناسبی برای تشخیص برهم کنش کوانتومی نمی باشد[1] .اخیرا معیاری به نام دیسکورد کوانتومی (اختلاف کوانتومی) [1,2]جهت تشخیص برهم کنش کوانتومی معرفی شده است که به نظر می رسد معیار مناسبی برای تشخیص همبستگی کلاسیکی باشد. همبستگی کل که شامل همبستگی کلاسیکی و کوانتومی می باشد مطابق رابطه ی زیر تعریف می شود[1]:

$$I(\rho_{A:B})=S(\rho_A)+S(\rho_B)-S(\rho_{A:B}) \quad (1)$$

که $S(\rho_A)$ انتروپی زیر سیستم A و $S(\rho_B)$ انتروپی زیر سیستم B و $S(\rho_{AB})$ انتروپی مشترک بین دو زیر سیستم A وB است که از رابطه ی زیر به دست می آید[1]:

$$S(\rho_{AB})=-tr(\rho_{AB}\log\rho_{AB}) \quad (2)$$

ρ_{AB} ماتریس چگالی دو زیرسیستم A و B است ρ_A و ρ_B ماتریس های چگالی کاهش یافته زیر سیستم های A و B هستند که با استفاده از رابطه ی زیر به دست می آیند[3] :

$$\rho_A=tr_B(\rho_{AB}) \quad \text{و} \quad \rho_B=tr_A(\rho_{AB}) \quad (3)$$

همبستگی کلاسیکی هم به صورت زیر بیان می گردد[1]:

$$\tilde{J}_A(\rho_{AB})=S(\rho_B)-\min_{\{E_k^A\}}\sum_k p_k S(\rho_{B|k}) \quad (4)$$

حال همبستگی کوانتومی از تفاضل همبستگی کلی و همبستگی کلاسیکی به صورت زیر به دست می آید[1]:

$$\tilde{D}_A(\rho_{AB})=I(\rho_{AB})-\tilde{J}_A(\rho_{AB}) \quad (5)$$

با نگاهی به رابطه فوق و عمل بهینه سازی متوجه می شویم که انجام محاسبات فوق کار ساده ای نیست و نیاز به محاسبات پیچیده ی ریاضی دارد. در سال های اخیر روشی آسان برای محاسبه ی اختلاف کوانتومی برای زیرمجموعه ی خاصی از حالات کوانتومی به نام حالات X ارائه شده است[1]. طبق تعریف یک حالت X به صورت زیر تعریف می شود[1]:

$$X=\begin{pmatrix}\rho_{00} & 0 & 0 & \rho_{03}\\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0\\ 0 & \rho_{12}^* & \rho_{22} & 0\\ \rho_{03}^* & 0 & 0 & \rho_{33}\end{pmatrix} \quad (6)$$

مطابق این قضیه اندازه گیری بهینه برای اختلاف کوانتومی ازیک حالت X بسته به شرایط به صورت زیر بیان می شود[1]:

(۷)

$$\sigma_z^A \; if \quad \left(|\rho_{12}|+|\rho_{03}|\right)^2 \le (\rho_{00}-\rho_{11})(\rho_{33}-\rho_{22})$$

(۸)

$$\sigma_x^A \; if \quad \left|\sqrt{\rho_{00}\rho_{33}}-\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}\right| \le |\rho_{12}|+|\rho_{03}|$$

همانطور که مشخص می باشد با بررسی شرط فوق دیگر نیازی به روشهای بهینه سازی نیست.

۲- بر هم کنش مبادله ای هایزنبرگ دو اسپین در حضور میدان کوانتیزه

حال با توجه به قضیه ای که این جا مطرح شد به بررسی مدل فیزیکی شامل سیستمی متشکل از دو اسپین با برهم کنش مبادله ای هایزنبرگ در حضور میدان کوانتیزه بایک مد تحت تقریب موج دوار می پردازیم که به صورت زیر تعریف می گردد [2]:

(9)

$$H=\nu a^\dagger a+\frac{\omega}{2}\left(\sigma_1^z+\sigma_2^z\right)+\Omega\left[a\left(\sigma_1^++\sigma_2^+\right)+a^\dagger\left(\sigma_1^-+\sigma_2^-\right)\right]$$
$$+J_x\sigma_1^x\sigma_2^x+J_y\sigma_1^y\sigma_2^y+J_z\sigma_1^z\sigma_2^z$$

که ω فرکانس گذار بین ویژه حالت هایی بااسپین1/2است و ν فرکانس میدانی است که بر حسب عملگرهای خلق و فنای a و $a^\dagger$ توصیف می شود. همچنین Ω ثابت کوبلاژ بین میدان و ذرات می باشد که به فرکانس رابی مشهور است. J_x و J_y و J_z ثابت های کوبلاژ مبادله ای بین دو ذره با اسپین1/2است. $\sigma_i^\pm=\sigma_i^x\pm\sigma_i^y$ ماتریس های پائولی با i=1 , 2 هستند. نمایش ماتریسی هامیلتونی فوق در پایه ویژه حالات ماتریس های پائولی به شکل زیر نوشته می شود[2]:

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-30]

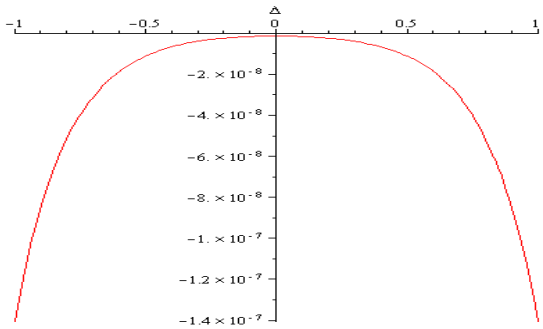
$$H=\begin{pmatrix} \Delta+\nu(n+1)+J_z & \Omega\sqrt{n+1} & \Omega\sqrt{n+1} & 0 \\ \Omega\sqrt{n+1} & \nu(n+1)-J_z & 2J & \Omega\sqrt{n+2} \\ \Omega\sqrt{n+1} & 2J & \nu(n+1)-J_z & \Omega\sqrt{n+2} \\ 0 & \Omega\sqrt{n+2} & \Omega\sqrt{n+2} & -\Delta+\nu(n+1)+J_z \end{pmatrix} \quad (10)$$

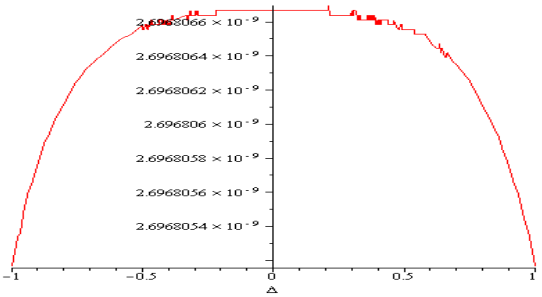
که n تعدادفوتون ها و Δ فرکانس تنظیم است.اگر در این هامیلتونی $\Omega=0$ باشد خواهیم داشت[2]:

$$H=\begin{pmatrix} \Delta+\nu(n+1)+J_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu(n+1)-J_z & 2J & 0 \\ 0 & 2J & \nu(n+1)-J_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta+\nu(n+1)+J_z \end{pmatrix} \quad (11)$$

۳- دیسکورد کوانتومی بر هم کنش اسپین-فوتون

اکنون با استفاده از هامیلتونی فوق به بررسی و محاسبه ی اختلاف کوانتومی می پردازیم. همان طور که در بالا اشاره شد در محاسبه ی این کمیت در حالت کلی دچار مشکل هستیم به همین دلیل با استفاده از قضیه ی مطرح شده این کمیت را محاسبه می کنیم. همان طور که دیدیم برای محاسبه در ابتدا باید به بررسی دو شرط مطرح شده بپردازیم. با بررسی دو نمودار شکل (1) می بینیم که رابطه (8) برقرار است به طوریکه نمودار با انتخاب ν=0.5, j =-1 , j_z =0.8 , n=1, t=0.2 به ازای مقادیر Δ همواره مثبت می باشد.





شکل ۱: بررسی شرایط قضیه در مرجع [۳] به ازای مقادیر , j =-1 ν =0.5, j_z =0.8 , n=1 , t=0.2 شکل بالا در ارتباط با رابطه (۷) و شکل پایین بررسی رابطه (۸) می باشد.

حال با استفاده از ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس (11) به ازای $\Omega=0$، ماتریس چگالی گرمایی را مطابق رابطه زیر بدست می آوریم[4]:

$$\rho=Z^{-1}\sum_{i=1}^{4}\exp(-\beta E_i)|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \quad (12)$$

که در این رابطه Z تابع پارش، β ثابت بولتزمن $(\beta=\frac{1}{k_BT})$، E_i ها ویژه مقادیر و $|\Psi\rangle$ها ویژه حالات هامیلتونی ذکر شده با $\Omega=0$ است. با توجه به ماتریس حالت X بیان شده، ماتریس چگالی $\rho_{(T)}$ (Tیعنی گرمایی) به صورت زیر به دست می آید[5]:

$$\rho(T)=\frac{1}{Z}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad (13)$$

عناصر این ماتریس چگالی را با حالت X بیان شده مقایسه می کنیم داریم:

$$\rho_{00}=a=1/Ze^{-1/T(J_Z+\Delta+\nu n+\nu)} \text{ و } \rho_{03}=0 \text{ و}$$

$$\rho_{11}=b=1/Ze^{-1/T(-J_Z+\nu+\nu n)}(2\cosh 2J/T)$$

$$\rho_{12}=c=1/Ze^{-1/T(-J_Z+\nu+\nu n)}(-2\sinh 2J/T)$$

$$\rho_{12}^{*}=d=1/Ze^{-1/T(-J_Z+\nu+\nu n)}(-2\sinh 2J/T)$$

$$\rho_{22}=e=1/Ze^{-1/T(-J_Z+\nu+\nu n)}(2\cosh 2J/T)$$

$$\rho_{03}^{*}=0 \text{ و } \rho_{33}=f=1/Ze^{-1/T(-\Delta+J_Z+\nu+\nu n)}$$

با بررسی دو شرط در قضیه ی بیان شده به جای E_k^A یا σ_x^A قرار می گیرید یا σ_z^A،نتیجه ی به دست

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-30]

امده همان طور که دیدیم این است که در محاسبات از σ_x^A استفاده کنیم.رابطه ی p_k را می توان به شکل زیر نوشت[1]:

$$p_k = tr\left(\left(\sigma_x^A \otimes I\right)\rho\left(\sigma_x^A \otimes I\right)\right) \qquad (14)$$

که I ماترس واحد است همچنین برای $\rho_{B|k}$ داریم[1]:

$$\rho_{B|k} = tr_A\left(\left(\sigma_x^A \otimes I\right)\rho\left(\sigma_x^A \otimes I\right)\right)/\, p_k \qquad (15)$$

در نهایت ماتریس p_k را به شکل زیر به دست آوردیم:

$$p_k = tr\left[\frac{1}{Z}\begin{bmatrix} e & 0 & 0 & d \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ c & 0 & 0 & b \end{bmatrix}\right] = 1 \qquad (16)$$

با توجه به شرط واحد بودن رد ماتریس چگالی مقدار p_k برابر ۱ بدست می آید. حال به محاسبه ی $\rho_{B|k}$ می پردازیم که در نهایت به این جواب رسیدیم:

(17)

$$\rho_{B|k} = (a/Z + e/Z)(|0\rangle\langle 0|) + (b/Z + f/Z)(|1\rangle\langle 1|)$$

انتروپی $\rho_{B|k}$ را از رابطه (۲) به دست می اوریم که به صورت زیر است:

$$S_{\rho_{B|k}} = \left(-\frac{a}{Z} - \frac{e}{Z}\right)\log\left(\frac{a}{Z} + \frac{e}{Z}\right) + \left(-\frac{b}{Z} - \frac{f}{Z}\right)\log\left(\frac{b}{Z} + \frac{f}{Z}\right) \qquad (18)$$

$\rho(T)$ رامساوی با ρ_{AB} می گیریم و ρ_A و ρ_B رابه دست می آوریم.

$$\rho_A = tr_B(\rho_{AB}) \qquad \rho_B = tr_A(\rho_{AB}) \quad (۱۹)$$

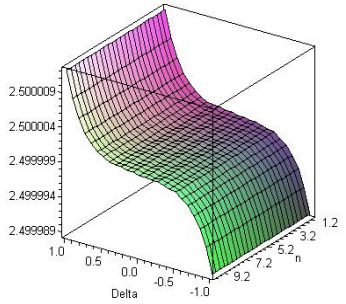
با استفاده از روابط بالا انتروپی ρ_A و ρ_B را محاسبه می کنیم:(20)

$$S(\rho_B) = \left(-\frac{a}{Z} - \frac{e}{Z}\right)\log\left(\frac{a}{Z} + \frac{e}{Z}\right) + \left(-\frac{b}{Z} - \frac{f}{Z}\right)\log\left(\frac{b}{Z} + \frac{f}{Z}\right)$$

$S(\rho_A)$ در محاسبات ساده می شود. حال با استفاده از نتایج فوق به محاسبه ی اختلاف کوانتومی($Q(\rho)$ می پردازیم:

$$Q(\rho) = S(\rho_B) + S(\rho_{B|k}) - S(\rho_{AB}) \qquad (21)$$

$$\begin{aligned}
Q(\rho) = {} & ((-a/Z - e/Z)\log(a/Z + e/Z) + \\
& (-b/Z - f/Z)\log(b/Z + f/Z) + (-a/Z - e/Z)\log(a/Z + e/Z) + \\
& (-b/Z - f/Z)\log(b/Z + f/Z) - [(-a/Z)\log(a/Z) + \\
& +(-f/Z)\log(f/Z) + (-b/(2Z) - e/(2Z) - 1/(2Z) \\
& \sqrt{(b^2 - 2be + e^2 + 4dc)})\log((b/2Z) + e/(2Z) + \\
& 1/(2Z)\sqrt{b^2 - 2be + e^2 + 4dc})) + (-b/(2Z) - e/(2Z) + 1/(2Z) \\
& \sqrt{(b^2 - 2be + e^2 + 4dc)})\log((b/2Z) + e/2Z - 1/(2Z) \\
& \sqrt{(b^2 - 2be + e^2 + 4dc)})])
\end{aligned}$$



شکل۲:اختلاف کوانتومی به ازای مقادیر: $t = 0.2,\ j_z = 0.8,\ j = -1, \nu = 0.5$ را نشان می دهدکه همواره مقدار ان مثبت است و بازه تغییرات Δ از۱- تا۱است.

۴- نتیجه‌گیری

با انجام محاسبات و رسم نمودار مشاهده شد که با افزایش Δ درهمتنیدگی افزایش می یابد ولی جهت گیری ان متفاوت است در بازه ی ۰ تا۱و۰تا ۱- سمت و سوی ان متفاوت است.

مراجع

[1] Chen, Qing, *Quantum discord of two-qubit X-states*, Phys. Rev. A p.84, *2011*.

[2] Liang, Jiu Qing and Chen, Guanrong , *Quantum phase transition of entanglement in Heisenberg spin model with quantized field* , Eur. Phys. *J. D 39*, p.313-320, 2006.

[3] Chen, Xiao, *Quantum Entanglement and Thermal Reduced Density Matrices in Fermion and Spin Systems on Ladders*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment Vol 8/P. 08013, 2013.

[4] Rong, Chen Shi and Jie, Xia Yun and Xiao, Man Zhong, *Quantum phase transition and entanglement in Heisenberg XX spin chain with impurity*, Chin. Phys. B Vol. 19, No. 5, 2010.

[5] Yue, Rui-Hong, *Impurity in Pairwise Entanglement of Heisenberg XX Open Chain*, Commun. Theor.Phys.48, p.1009-1016, 2007.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-30]