بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

محاسبه معادله دینامیکی فازی حاصل از معادلات نرخ لانگ- کاباياشی در لیزر نیمه رسانا با کاواک عمودی

اکبر جعفری، خسرو مبهوتی، عذرا کیاست فر و رقیه چودار

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه

چکیده – در این مقاله با در نظر گرفتن یک زمان پایه معادلات لانگ-کاباياشی را باز نویسی کرده و با وارد کردن جمله گاوسی اختلال به عنوان نوفه و با بی بعد کردن این معادلات ، معادله درجه سوم فازی میدان لیزری متغیر بر حسب زمان محاسبه شده است. این معادله تغییرات فاز میدان لیزر بر حسب تغییرات زمان را مشخص می کند. در محاسبه این معادله، فاز و شدت میدان الکتریکی متغیر دینامیکی اصلی در نظر گرفته شده است. نشان داده شده است که دینامیک شدت خروجی بطور دقیقتری توسط معادله فازی در مقایسه با معادلات نرخ لیزری تعیین می شود.

کلید واژه- معادله فازی، کاواک عمودی، لیزر نیمه رسانا.

Calculation of dynamical phase equation from Lang- Kobayashi rate equations for vertical cavity semiconductor laser

Jafari, Akbar; Mabhouti, Khosro ; Kiasatfar, Ozra; Chodar, Rogayeh

Physics Department, Faculty of Sciences, Urmia University, Urmia

Abstract- In this paper by using lang kobayashi equations in the dimensionless format and adding gussian perturbation as a noise term, the third order phase equation for the laser filed is calculated. In this calculation, the phase and the intensity of the electrical filed has taken as main dynamical variable. It has been shown that the dynamics of the output intensity can be determined more accurately by the phase equation with compared to rate equations.

Keywords: phase equation, vertical cavity, semiconductor laser

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

۱- مقدمه

دینامیک غیرخطی لیزرهای نیمه رسانا از نقطه نظرکاربردی در علوم مهندسی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. از جمله می‌توان به کاربرد آنها در زمینه ارتباطات با فیبرهای نوری، ذخیره سازی داده های نوری، انتقال سیگنالها، به هم پیوستن کامپیوترها و توسعه‌ی زیرشبکه ها اشاره نمود [۱و۲] . لیزرهای نیمه هادی نسبت به پس خوراند های نوری بسیارحساس می با شند[۳] . در واقع، مقدار کمی از پسخوراند نوری برای تولید ناپایداریهای بی‌نظم کافی بوده و به تبع منجر به ایجاد شدت بالاتر و فرکانس های اختلالی می شود[۴] . لیزرهای نیمه رسانا بر حسب کاواک به دو مدل عمودی و افقی تقسیم می‌شوند [۵ و۶] . مدهای لیزر نیمه رسانا با کاواک عمودی، غالبا به صورت تک مد طولی است که ناشی از کاواک بسیار کوتاه آن می با شد[۴] . اما ممکن است دارای مدهای مختلف عرضی بالا برای حالت های با پمپاژ خیلی قوی نیز باشد[۷] . در این لیزرها برای پس خوراندهای پایین معقول است، که شدت میدان الکتریکی و فاز میدان الکتریکی را متغیر دینامیکی اصلی فرض می‌کنیم . از نقطه نظر کاربرد، مقادیر فاز میدان لیزر مشخص کننده توزیع شدت میدان می‌باشد که در محیط آزمایشگاهی تعیین این مقادیر مشکل است. همچنین فرآیند همزمان‌سازی سیستم‌های جفت شده لیزری هنگامی به صورت کامل برقرار می‌باشد که مقادیر مناسب فازی برای هر دو سیستم در نظر گرفته شده باشد[۸] . در این مقاله با استفاده از معادلات لانگ- کاباياشی درحضور ضریب نوفه و با بی‌بعد کردن این معادلات ، معادله فازی میدان لیزری با در نظر گرفتن پارامترهای پمپاژ (P)، فاکتور پهن شدگی (α)و شدت پس خوراند (k) محاسبه شده است. پاسخ مرتبه اول این معادله فازی را بدست آورده و با استفاده روش حل عددی، نمودار پاسخ مرتبه اول حاصل از معادله فازی رسم گردیده است. نهایتا نتایج حاصله، با نمودار تحول زمانی مستخرج از معادلات لانگ- کاباياشی مقایسه گردیده است.

۲- معادلات نرخ لانگ کاباياشی:

معادله نرخ توصیف کننده دینامیک لیزر نیمه رسانا با کاواک عمودی و معادله مربوط به تحول زمانی وارونی انبوهی را می‌توان بصورت زیر نوشت[۶] :

$$\dot{\mathrm{E}} = \frac{1+i\alpha}{2}\left[\Delta n - 1\right]\mathrm{E} + \mathrm{K}\,e^{-i\varphi}\mathrm{E}(t-\tau) + \sqrt{R}\;\tilde{\xi} \qquad (۱)$$

$$\mathrm{T}\dot{\Delta} n = -\Delta n + p - \Delta n\left|\mathrm{E}\right|^2 \qquad (۲)$$

در معادلات فوق E نشانگر میدان الکتریکی، Δn تغییرات چگالی حامل بار نسبت به آستانه $\Delta n = \dfrac{n-1}{n_{th}-1}$و $R = \left[\dfrac{n}{n_{th}}\right]^2 R_{sp}$ ضریب نوفه و $\tilde{\xi}$ جمله گاوسی نوفه می‌باشد که در آن n_{th} چگالی حامل در حالت آستانه می‌باشد. مقادیر مربوط به $\tilde{\zeta}$ نهایتا در بازه ی $[0,1]$ می‌باشد، همچنین α فاکتور پهن‌شدگی و K شدت پس‌خوراند است[۹]. در این مقاله مقادیر پارامترهای $\mathrm{T} = 30.833$، $\tau = 302.5$ و $\tilde{\zeta} = 1$ ثابت فرض شده و برای شدت پس‌خوراند، $\mathrm{K} = 0.25$ را در نظر می‌گیریم [۶].

۳- محاسبه معادله فازی:

در این قسمت برای بررسی اثرات جمله‌ی اختلال بر دینامیک پایداری لیزر، معادلات(۲) و(۳) را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{dE}{ds} = \left(\frac{1+i\alpha}{2}\right)(\Delta n - 1)\mathrm{E} + \mathrm{K}\,e^{-i\varphi}\,\mathrm{E}(s-\theta) + \sqrt{R}\,\tilde{\xi} \qquad (۳)$$

$$\mathrm{T}\frac{dn}{ds} = -\Delta n + P - \Delta n\left|\mathrm{E}\right|^2 \qquad (۴)$$

که با در نظر گرفتن مقیاس زمانی طول عمر فوتون τ_p در معادلات فوق پارامترهای زمانی به صورت $s \equiv \dfrac{t}{\tau_p}$ و $\theta \equiv \dfrac{\tau}{\tau_p}$ می‌باشند. τ_p و τ به ترتیب نشاندهنده طول عمر حامل فوتون و میزان تأخیر زمانی در کاواک خارجی می‌باشند. چگالی حامل‌ها و میدان الکتریکی را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$n = \frac{\mathrm{X}\omega}{\alpha} \qquad (۵)$$

$$\mathrm{E} = \sqrt{p}\left(1+\frac{e}{\alpha}\right)\exp\left[i\left(\phi - \frac{\varphi}{\theta}s\right)\right] \qquad (۶)$$

بعد از قرار دادن روابط(۵) و (۶) در معادلات (۳)و(۴)، معادله ۳ را به صورت زیر می‌نویسیم:

(۷)

$$\omega\sqrt{\mathrm{P}}\,\frac{d}{dS}\left(e\chi p\left[i\left(\phi - \frac{\varphi S}{\theta\omega}\right)\right]\right) = \frac{1+i\alpha}{2}\left(\frac{\chi\omega\beta}{\alpha} - \beta - 1\right)\times$$
$$\sqrt{\mathrm{P}}\left(1+\frac{e}{\alpha}\right)e\chi p\left[i\left(\phi - \frac{\varphi S}{\theta\omega}\right)\right] + \mathrm{K}e^{-i\varphi}\sqrt{\mathrm{P}}\left(1+\frac{e}{\alpha}\right)\times$$
$$\exp\left[i\left(\phi\left(\frac{S}{\omega}-\theta\right) - \frac{\varphi}{\theta}\times\left(\frac{S}{\omega}-\theta\right)\right)\right] + \sqrt{\frac{R}{\mathrm{P}}}\xi'\left(\frac{S}{\omega}\right)$$

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

در رابطه‌ی بالا $\beta = \frac{1}{n_{th}-1}$ ، $\zeta' = \frac{1+2\mathrm{P}}{2\mathrm{P}}$ و $S \equiv \omega s$ می‌باشد. با جداسازی قسمت های حقیقی و موهومی معادله ۷ داریم:

$$\frac{d\phi}{dS} = \frac{1}{2}\beta\chi + \Delta - \frac{\alpha}{2\omega}(\beta+1) \qquad (۸)$$

$$\frac{de}{dS} = \frac{1}{2}\beta\chi + \Lambda\cos[\phi(S-\Theta)-\phi(S)] \qquad (۹)$$
$$-\frac{\alpha}{2\omega}(\beta+3)+\frac{\alpha}{\omega}\sqrt{\frac{R}{\mathrm{P}}}\tilde{\zeta}(S)\cos\left[\phi(S)-\frac{\varphi S}{\theta}\right]$$

که در آن $\Delta = \frac{\varphi}{\omega\theta}$ ، $\Lambda = \frac{\mathrm{K}\alpha}{\omega}$ و $\Theta \equiv \omega\theta$ می باشد. معادلات ۸ و ۹ به ترتیب تغییرات فاز و دامنه میدان را نشان می‌دهند. با استفاده از معادلات ۷، ۸ و ۹ معادله فازی لیزر را به صورت زیر می‌نویسیم:

(۱۰)

$$\ddot{\phi} + \ddot{\phi}(\beta\omega\zeta') - \beta^2\frac{(\dot{\phi}-\Delta)}{2} + \beta^2\left(\frac{e}{4\omega}\right)(\beta+1)$$
$$-\frac{\beta^2}{2}\Lambda\cos[\phi(S-\Theta)-\phi(S)]$$
$$-\frac{\beta^2\alpha\sqrt{R}}{2\omega\sqrt{\mathrm{P}}}\tilde{\zeta}(S)\cos\left[\phi(S)-\frac{\varphi S}{\theta}\right]=0$$

معادله فازی بدست آمده می‌تواند بر حسب مراتب مختلفی از ω پاسخهای متعددی به صورت زیر داشته باشد که در آن $\zeta \equiv \omega S$ در نظر گرفته شده است:

$$\Phi(S,\zeta,\omega) = \Phi_0(\mathrm{S},\zeta) + \omega\Phi_1(S,\zeta) + \ldots \qquad (۱۱)$$

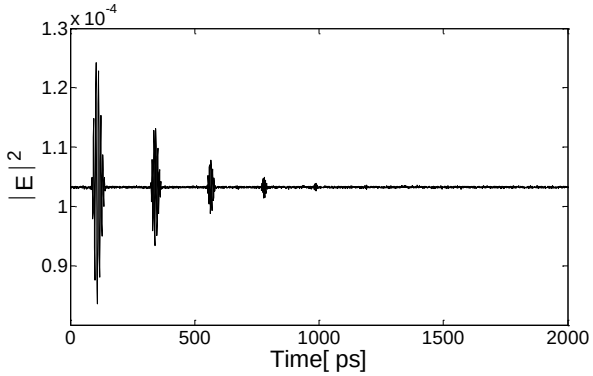
باحل معادله‌ی فازی، پاسخ مرتبه صفرام به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Phi_0 = \Delta S + R + B(\zeta) + A(\zeta)\cos[\mathrm{S} + \mathrm{v}(\zeta)] \qquad (۱۲)$$

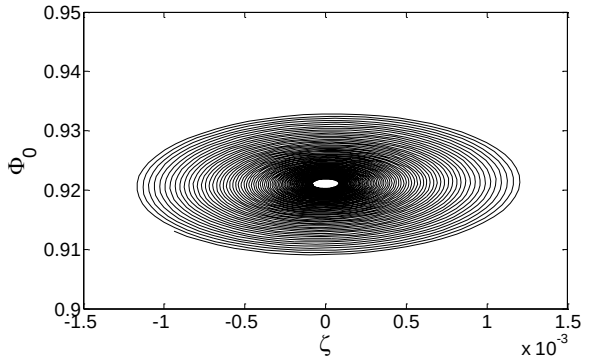
که در آن ضرایب A ، B ، ν و R به صورت مجموعه ای از توابع متغیر بر حسب ζ می‌باشند.

۴- حل عددی پاسخ حاصله از معادله فازی:

در معادله ۱۲ ضرایب A ، B ، ν و R در واقع مجموعه ای از توابع مثلثاتی بر حسب سینوس، کسینوس و مراتب مختلفی از توابع بسل است، که محاسبه دقیق پاسخ حاصله به صورت تحلیلی مشکل می‌باشد. از این رو در این بخش به حل عددی این معادله می‌پردازیم. معادلات جفت شده ۱ و ۲ مشخص کننده مقادیر میدان و وارونی انبوهی می‌باشند. همچنین این معادلات توانایی توصیف تحول زمانی و دینامیک شدت خروجی لیزر را دارا می‌باشند. اما آنچه که پاسخ حاصل از معادله فازی را دارای اهمیت می‌کند، توانایی این معادله در تعیین دقیق دینامیک نهایی شدت خروجی لیزر می‌باشد. به بیان دیگر منحنی تحول زمانی تنها دینامیک لیزر را در محدوده زمانی انتخاب شده نشان می‌دهد حال آنکه نمودار فازی میدان لیزری دینامیک نهایی میدان لیزری را بدون وابستگی به محدوده زمانی انتخاب شده مشخص می‌کند. در شکل ۱ ، تحول زمانی دینامیک شدت خروجی $|E^2|$ برای پارامترهای $\mathrm{P}=0.42$ ، $\alpha=3.3$ و $R=2\times10^{-4}$ رسم شده است. در توصیف تحولات دینامیکی نمودار، همانطور که مشاهده می‌شود مدهای لیزری ابتدا به صورت پالسی شروع به نوسان می‌کنند و مابین هر پالس نوسانات آشوبناک ناشی از وجود نوفه نیز وجود دارد. اما، با گذشت زمان از شدت این پالسها کاسته شده تا اینکه نهایتا دینامیک پالسی به طور کامل حذف گردد. در شکل ۲ نمودار فازی مدهای نوسانی نشان داده شده در شکل ۱ با استفاده از معادله۱۲ رسم شده است.



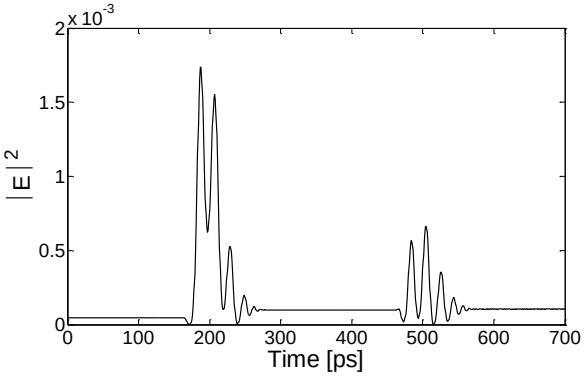
شکل۱: نمودار تحول زمانی شدت خروجی لیزر، $|E|^2$ ، بر حسب پارامترهای $\mathrm{P}=0.42$ ، $\alpha=3.3$ و $R=2\times10^{-4}$ برای بازه زمانی ۲۰۰۰ پیکو ثانیه.



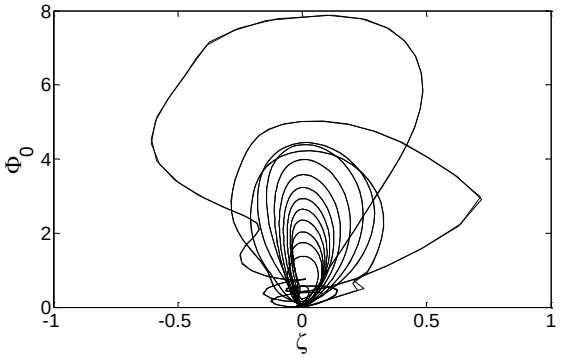
شکل۲: نمودار فاز شدت خروجی لیزر، $|E|^2$ ، $\mathrm{P}=0.42$ ، $\alpha=3.3$ و $R=2\times10^{-4}$.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

این نمودار به خوبی وجود تعدد مدهای نوسانی را نشان می دهد. همچنین، مشخص می کند که شدت خروجی لیزری نهایتا به سمت مقدار کمینه ای میل میکند (مرکز دایره). در واقع شکل ۲ تصویری نهایی از نوع دینامیک شدت خروجی لیزر بدون وابسته گی زمانی ارائه میکند. برای درک بهتر این موضوع، نمودار تحول زمانی شدت خروجی لیزر را برای همان مقادیر استفاده شده در شکل (۱) اما برای بازه زمانی کوتاهی مجددا رسم می کنیم (شکل ۳).



شکل۳: نمودار تحول زمانی شدت خروجی لیزر، $|E|^2$ ، بر حسب پارامترهای $P = 0.42$، $\alpha = 3.3$ و $R = 2\times10^{-4}$ برای بازه زمانی ۷۰۰ پیکو ثانیه.



شکل۴ نمودار فاز شدت خروجی لیزر، $|E|^2$، برای دینامیک پالسی.

همانطور که مشاهده می شود دینامیک خروجی را که این نمودار نشان می دهد، دینامیک پالسی است. با مقایسه این نمودار با نمودار شکل۱ می توان مشاهده کرد که در واقع دینامیک خروجی لیزر تنها به صورت پالسی نخواهد بود. برای درک بهتر از نمودار شکل ۲، می توان نمودار فازی مربوط به دینامیک پالسی را برای مقادیر دلخواهی رسم نمود(شکل ۴) و آن را با شکل ۲ مقایسه کرد.

همانطور که از این شکل مشاهده می شود، مسیر تحول فازی مربوط به میدان خروجی لیزری ترکیبی از چندین مسیر بسته می باشد که فاز میدان به صورت منظمی از مقادیر بزرگتر به سمت مقادیر کوچکترتغییر می یابد ومجددا این فرآیند تکرار می شود.

۵- نتیجه گیری:

در تعیین دینامیک شدت خروجی لیزر به طور معمول از نمودارهای تحول زمانی شدت خروجی لیزر استفاده می‌گردد. این نمودارها به خوبی می‌توانند تحولاتی دینامیکی شدت خروجی لیزر را برای بازه زمانی انتخاب شده مشخص نمایند. اما همانطور که در از نمودارهای شکل ۱ و ۳ مشاهده شد، نمودار تحول زمانی می‌تواند با توجه به بازه زمانی انتخاب شده در رسم آن نتایج متفاوتی را ارائه دهد. در واقع دقت نتایج حاصله از نمودار تحول زمانی وابسته به بازه زمانی انتخاب شده برای رسم آن می‌باشد. از این رو در این مقاله با پایه قرار دادن معادلات نرخ لانگ- کاباياشی معادله فازی میدان بدست آورده شد، و نشان داده شد که نتایج حاصل از پاسخ مرتبه اول این معادله وابسته به بازه ی زمانی انتخاب شده نمی‌باشند. به بیان دیگر منحنی تحول زمانی تنها دینامیک لیزر را در محدوده زمانی انتخاب شده نشان می‌دهد حال آنکه نمودار فازی میدان لیزری دینامیک نهایی میدان لیزری را بدون وابستگی به محدوده زمانی انتخاب شده مشخص می‌کند.

مراجع

[1] S. Banerjee, L. Rondoni, S. Mukhopadhyay, AP. Misra, *Optics Communications* **284**, 2278 (2011).

[2] J.M. Buldu, J. Garcia-Ojalvo, M.C. Torrent, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **41**, 164 (2005).

[3] S. Tang, JM. Liu , *IEEE Journal of Quantum Electronics* **37**, 329 (2011).

[4] G.R. Gray, T. Ryan, G. P. Agrawal, E. C. Gage, *Proc. SPIE* **45**, 2039 (1993).

[5] K. Green, *Physical Review E* **79**, 036210 (2009).

[6] A. Torcini, S. Barland, G. Giacomelli, F. Marin, *Physical Review A* **67** ,063801 (2006).

[7] G. Giacomelli, F. Marin, M. Romanelli, *Physical Review* A **67**, 053809 (2003).

[8] M. Bulinski, M. L. Pascu, I. R. Andrei, , *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, Vol. **6**, No. 1, 77 – 86 (2004).

[9] S. Barland, P. Spinicelli, G. Giacomelli, F. Marin, *IEEE J.* Quantum Electron **41**, 1235 (2005).

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]