



## بررسی تشدیدگر یک لیزر Nd:YAG دارای آینه گاوی با استفاده از روش ماتریس ABCD

نعیمه شریفی<sup>۱</sup>، محسن حاتمی<sup>۲</sup>، محمود برهانی<sup>۱</sup> و غلامرضا هنرآسا<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه اتمی و ملکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

<sup>۲</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده - در این مقاله مروی بر روی *ABCD* برای عنصرهای اپتیکی مختلط خواهیم کرد. سپس به بررسی آینه‌های گاوی و ماتریس انتقال آن می‌پردازیم. در ادامه با در نظر گرفتن یک لیزر *Nd:YAG* با آینه خروجی گاوی، پارامترهای مختلف تشدیدگر مانند شعاع انحصار، اندازه لکه و حجم مدد باریکه لیزر را به دست آورده و با حالتی که آینه خروجی یک آینه معمولی است، مقایسه خواهیم کرد. نتایج نشان می‌دهد که توزیع بازتابندگی آینه گاوی باعث تغییر در اندازه لکه و شعاع انحصاری باریکه و حجم مدد درون ماده فعال لیزر می‌گردد.

کلید واژه- آینه گاوی، تشدیدگر اپتیکی، لیزر *Nd:YAG* ، ماتریس *ABCD*

## Investigation of a Nd:YAG Laser Resonator with Gaussian Mirror Using ABCD Matrix Method

Naeimeh Sharifi<sup>1</sup>, Mohsen Hatami<sup>2</sup>, Mahmoud Borhani<sup>1</sup> and Gholamreza Honarasa<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

<sup>2</sup> Physics Group, Faculty of Science, Shiraz University of Technology, Shiraz

**Abstract-** In this paper, we review the ABCD matrix method for complex optical elements. Then, the Gaussian mirrors and their transform matrix are investigated. By considering a Nd:YAG laser with a Gaussian mirror as an output coupler, different resonator parameters such as the radius of curvature, spot size and mode volume of laser beam are obtained and compare them with the case of ordinary mirror. The results show that the spot size, radius of curvature and mode volume of laser beam inside laser active medium change with reflectivity distribution of the Gaussian mirror.

Keywords: ABCD matrix, Gaussian mirror, Nd:YAG laser, Optical resonator

$w$  و طول موج لیزر  $(\lambda = \frac{\lambda_0}{n})$  است که  $\lambda_0$  طول موج خلا و  $n$  ضریب شکست محیط است. این کمیت را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2} \quad (3)$$

با حل معادله (۲)، می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{(D-A) + i(d-a)}{2(B+ib)} \\ &+ \frac{\sqrt{((A+D)^2 - (a+d)^2 - 4) + i2(A+D)(a+d)}}{2(B+ib)} \end{aligned} \quad (4)$$

با فرض اینکه:

$$\begin{aligned} \sqrt{((A+D)^2 - (a+d)^2 - 4) + i2(A+D)(a+d)} &= \sqrt{e+if} \\ &= x+iy \end{aligned} \quad (5)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} e &= (A+D)^2 - (a+d)^2 - 4, \\ f &= 2(A+D)(a+d) \end{aligned} \quad (6)$$

با جایگذاری (۵) در (۴) و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{(D-A+x)B + (d-a+y)b}{2(B^2 + b^2)} \\ &- i \frac{(D-A+x)b + (d-a+y)B}{2(B^2 + b^2)} \end{aligned} \quad (7)$$

از مقایسه (۳) با (۷) شعاع انحنای باریکه  $R$  و اندازه لکه  $w$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R = \frac{2(B^2 + b^2)}{(D-A+x)B + (d-a+y)b} \quad (8)$$

و

$$w^2 = \frac{\lambda}{\pi} \frac{2(B^2 + b^2)}{(D-A+x)b + (d-a+y)B} \quad (9)$$

که در آن  $x$  و  $y$  با کمک رابطه (۵) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{\frac{e \pm \sqrt{e^2 + f^2}}{2}}, \\ y &= \pm \sqrt{\frac{-e \pm \sqrt{e^2 + f^2}}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

## ۱- مقدمه

یکی از روش‌های پرکاربرد در تحلیل و طراحی تشدیدگرهای لیزری و انتشار باریکه‌ها روش ماتریس  $ABCD$  است [۱]. در این روش ویژگی‌های المان‌های اپتیکی حقیقی و موهومی به صورت ماتریس‌های حقیقی و موهومی نشان داده می‌شود. با استفاده از روش ماتریس  $ABCD$  انواع مختلفی از تشدیدگرهای مانند تشدیدگر موج ایستاده با آینه‌های موهومی [۲]، تشدیدگر موج ایستاده ناپایدار با آینه‌های حقیقی و موهومی [۳]، تشدیدگر موج رونده با المان‌های حقیقی [۴] و ... طراحی و تحلیل شده است.

اخیراً آینه‌های گاوی به عنوان آینه‌هایی با بازتاب متغیر برای رسیدن به توان‌های بالا در تشدیدگرهای لیزری بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند [۵]. از این آینه‌ها بیشتر در تشدیدگرهای ناپایدار استفاده می‌شود اما تحقیقات نشان می‌دهد که استفاده از آینه‌های گاوی به عنوان آینه خروجی گاوی در تشدیدگرهای پایدار هم بسیار مفید است [۶]. در این مقاله ضمن بررسی تشدیدگر لیزر در حالتی که شامل المان‌هایی با ماتریس انتقال مختلط است، با در نظر گرفتن یک آینه گاوی که دارای ماتریس انتقال مختلط است و یک آینه معمولی به عنوان آینه خروجی در یک تشدیدگر لیزر Nd:YAG، پارامترهای تشدیدگر را به دست آورده و نتایج در دو حالت مختلف را با هم مقایسه می‌کنیم.

## ۲- ماتریس $ABCD$ برای عنصرهای مختلف

در حالت کلی، ماتریس انتقال برای یک رفت و برگشت کامل در تشدیدگر به صورت زیر است [۷]:

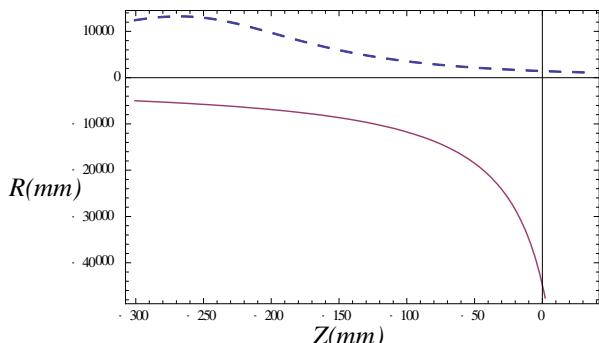
$$ABCD = \begin{bmatrix} A + ia & B + ib \\ C + ic & D + id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در آن  $a, b, c, d$  و  $A, B, C, D$  همه حقیقی هستند. برای باریکه‌ای که پس از یک رفت و برگشت کامل باز تولید می‌شود، داریم:

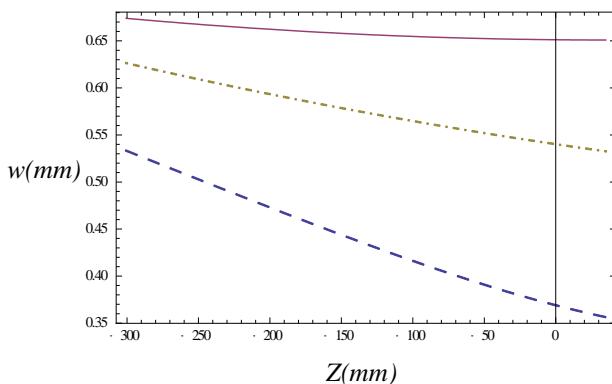
$$\frac{1}{q} = \frac{(A+ia)q + (B+ib)}{(C+ic)q + (D+id)} \quad (2)$$

که در آن  $q$  پارامتر موهومی باریکه است.  $q$  شامل اطلاعاتی در مورد شعاع انحنای باریکه  $R$ ، اندازه لکه باریکه

با در نظر گرفتن پارامتر  $z$  در تشدیدگر به عنوان فاصله از انتهای میله لیزری که به آینه خروجی نزدیکتر است، می‌توان شعاع انحنا و اندازه لکه باریکه را بر حسب فواصل مختلف در تشدیدگر به دست آورد. به این منظور ماتریس المانهای مختلف در تشدیدگر از جمله ماتریس آینه گاوسی (۱۲) را برای یک رفت و برگشت کامل را در هم ضرب کرده و عناصر ماتریس (۱) را به دست می‌آوریم. اگر آینه خروجی را بصورت آینه معمولی تخت در نظر بگیریم بخش‌های موهومی را در رابطه (۱) نخواهیم داشت یعنی  $a=b=c=d=0$  است. بنابراین به راحتی می‌توان  $R$  و  $w$  را به دست آورد. حال آینه خروجی را با یک آینه گاوسی برای حالتی که  $w_m$ ، یک بار  $4mm$  و بار دیگر  $8mm$  باشد، جایگزین می‌کنیم [۷]. نمودار شعاع انحنا و اندازه لکه باریکه درون تشدیدگر برای آینه خروجی معمولی و گاوسی در شکل ۲ و ۳ رسم شده است.



شکل ۲: شعاع انحنای باریکه بر حسب  $z$  در تشدیدگر برای آینه خروجی معمولی (خط تیره) و آینه خروجی گاوسی (خط چین).



شکل ۳: اندازه لکه بر حسب  $z$  در تشدیدگر برای آینه خروجی معمولی (خط تیره)، آینه خروجی گاوسی برای  $w_m = 4mm$  (خط چین) و برای  $w_m = 8mm$  (خط نقطه).

### ۳- آینه گاوسی

آینه‌های گاوسی از نوع آینه‌های بازتاب کننده متغیر هستند. در آینه‌های گاوسی بازتابندگی بر حسب فاصله از مرکز آینه به صورت تابع توزیع گاوسی است یعنی بازتاب در وسط آینه بیشتر و در کناره‌ها کمتر است. بازتاب در آینه گاوسی را می‌توان به صورت زیر نشان داد [۸]:

$$R(r) = R_0 \exp[-2(\frac{r}{w_m})^2] \quad (11)$$

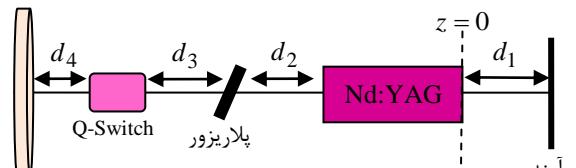
که در آن  $R_0$  ضریب بازتاب مرکزی،  $r$  فاصله از مرکز آینه و  $w_m$  شعاع عرضی آینه است که در آن بازتاب به  $\frac{1}{e^2}$  اندازه بیشینه خود می‌رسد. ماتریس آینه گاوسی به صورت زیر معرفی شده است [۲]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\rho} & 1 & 0 \\ -i\frac{\lambda}{\pi w_m^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ i\frac{\lambda}{\pi w_m^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\frac{\lambda}{\pi w_m^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در آن  $\rho$  شعاع انحنای آینه،  $\lambda$  طول موج نور است. این ماتریس شامل قسمت حقیقی و موهومی است.

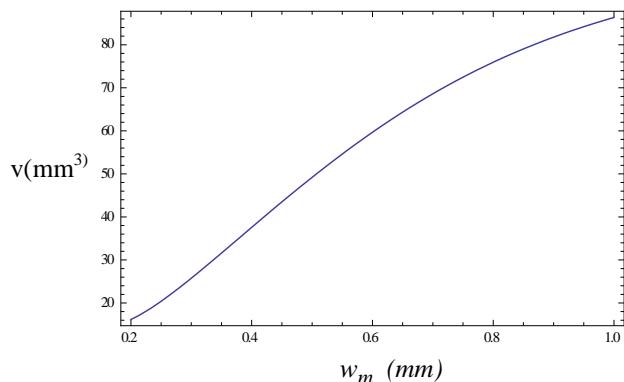
### ۴- سامانه لیزری

سیستم لیزری مورد نظر شامل دو آینه تخت و کروی است. آینه تخت، آینه خروجی و آینه کروی با شعاع  $5m$  آینه عقب لیزر است. طول کل رزوناتور  $336mm$  است. بین دو آینه میله لیزر Nd:YAG به طول  $80mm$  پلاریزور با ضریب شکست  $1/507$  و طول  $1075mm$  با ضریب شکست  $2/232$  و طول  $484mm$  Q-Switch قرار گرفته است. فواصل بین المان‌ها در شکل ۱ آمده است.



خرجی

شکل ۱: مشدد لیزر مورد نظر با  $d_1 = 35mm$ ،  $d_2 = 147mm$ ،  $d_3 = 30mm$  و  $d_4 = 38mm$



شکل ۴: نمودار حجم مد بر حسب  $w_m$  برای لیزر Nd:YAG با مشخصات ذکر شده.

## ۶- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر با استفاده از روش ماتریس ABCD و ماتریس انتقال مختلف برای آینه‌های گاووسی، تشیدیدگر یک لیزر Nd:YAG با آینه خروجی گاووسی را مورد بررسی قرار دادیم. نتایج نشان می‌دهد که مشخصات آینه گاووسی و نحوه بازتابندگی آن تاثیر زیادی در پارامترهای تشیدیدگر از جمله اندازه لکه و شعاع انحنای و همچنین حجم مد درون محیط فعال دارد. برای سیستم لیزر در نظر گرفته شده نشان داده شد که جایگزین کردن آینه خروجی معمولی با یک آینه گاووسی باعث تغییر در اندازه لکه و حجم مد می‌شود.

## مراجع

- [۱] وردین، جوزف، الکترونیک لیزر، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۸.
- [۲] Yariv A. and Yeh P., *Confinement and stability in optical resonators employing mirrors with Gaussian reflectivity tapers*, *Opt Commun.* 13 (1975) 370-374.
- [۳] Sigman A. E., *Unstable optical resonator*, *Appl. Opt.* 13 (1974) 353-369.
- [۴] Martin K. I., Clarkson W. A., Hanna D. C., *Stable, high-power, single-frequency generation at 532 nm from a diode-bar-pumped Nd:YAG ring laser with an intracavity LBO frequency doubler*, *Appl. Opt.* 36 (1997) 4149-4152.
- [۵] Li J., Chen Y., Qin Y., *Vectorial structural properties of truncated beam generated by Gaussian mirror resonator in the near field*, *Optics & Lasers Tech.* 44 (2012) 1574-1582.
- [۶] Morin M., Cantin D., Poirier M., *Stable resonators with a graded reflectivity output coupler*, *Proc. SPIE* 4087 (2000) 795.
- [۷] Su B., Xue J., Sun L., Zhao H., Pei X., *Generalised ABCD matrix treatment for laser resonators and beam propagation*, *Optics & Lasers Tech.* 43 (2011) 1318-1320.
- [۸] Hodgson N. and Weber H., *Laser resonators and beam propagation*, Springer, 2003.

همانطور که مشاهده می‌شود برای سیستم لیزری در نظر گرفته شده، اندازه لکه در تمام طول تشیدیدگر با آینه معمولی بزرگتر از اندازه لکه در تشیدیدگر با آینه گاووسی است. همچنین در تشیدیدگر با آینه گاووسی هرچه مقدار  $w_m$  را بزرگتر انتخاب کنیم، اندازه لکه نیز بزرگتر می‌شود. با توجه به شکل ۳، مشاهده می‌شود که شعاع انحنای باریکه در تشیدیدگری با آینه گاووسی نسبت به تشیدیدگر با آینه معمولی تغییرات بسیار کمی دارد.

## ۵- حجم مد

یکی از پارامترهای تعیین کننده در میزان توان خروجی یک تشیدیدگر لیزری، حجمی از محیط فعال است که توسط مد مورد نظر پر می‌شود. تنها در این حجم است که انرژی ذخیره شده توسط مد از طریق گسیل القایی استخراج می‌شود. حجم مد برای مد TEM<sub>00</sub> از رابطه زیر به دست می‌آید [۸]:

$$(13) \quad V = \pi \int w^2 dz$$

که در آن بازه انتگرال روی محیط فعال گرفته می‌شود. برای سیستم لیزر در نظر گرفته شده (شکل ۱) با توجه به محل  $z=0$  این بازه از  $-L$  تا  $0$  می‌باشد. همانطور که از رابطه (13) مشخص است حجم مد به هندسه تشیدیدگر و محل قرارگیری محیط فعال در تشیدیدگر بستگی دارد. در این بخش می‌خواهیم با فرض ثابت بودن پارامترهای ذکر شده، نقش آینه گاووسی را در حجم مد TEM<sub>00</sub> مورد بررسی قرار دهیم. نمودار حجم مد بر حسب  $w_m$  در شکل ۴ رسم شده است. همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، هرچه شعاع عرضی آینه که در آن بازتابندگی آینه به  $1/e^2$  مقدار بیشینه خود می‌رسد بزرگتر باشد حجم مد نیز بیشتر می‌شود. بنابراین در طراحی تشیدیدگرهای شامل آینه گاووسی، یک پارامتر تاثیر گذار است. حجم مدی برای تشیدیدگر با آینه معمولی برابر  $55/78 \text{ mm}^3$  به دست می‌آید.