



بررسی تولید حالت‌های غیرکلاسیک میدان تابشی در سامانه‌ی اتم به دام افتاده‌ی داخل کاواک در تقریب مرتبه‌ی اول لمب-دیک

سمیه سلیمانی ریزی و محمدحسین نادری

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان، خیابان هزارجریب، اصفهان

چکیده - در این مقاله به مطالعه‌ی نظری تولید حالت غیرکلاسیک برای میدان داخل کاواک از طریق کنترل پارامتر لمب-دیک می-پردازیم. نشان می‌دهیم با اینکه هامیلتونی سامانه در مرتبه‌ی اول بر حسب پارامتر لمب-دیک ظاهراً هیچ غیرخطیتی ندارد، ولیکن وقتی هامیلتونی مؤثر را بدست می‌آوریم سامانه غیرخطیت ذاتی از خود نشان می‌دهد. با استفاده از روش ابرعملگرها عبارتی تحلیلی برای عملگر چگالی میدان بدست می‌آوریم و نمودار وارونی جمعیت اتمی را ترسیم می‌کنیم.علاوه بر این، با بررسیتابع توزیع \mathcal{Q} میدان و تحلیل رفتار دینامیکی آن و بیزگی‌های میدان تابشی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و درخواهیم یافت که برای یکی از مؤلفه‌های کوادراتوری میدان چلاندگی اتفاق می‌افتد.

کلید واژه- الکترودینامیک کوانتومی داخل کاواک، چلاندگی مؤلفه‌ی کوادراتوری میدان، سامانه‌ی اتم به دام افتاده، نابودی و بازآفرینش نوسانات رای

Investigation of generation of non-classical states for the radiation field in the system of a trapped atom in a cavity within the first order of the Lamb-Dicke approximation

Somayeh, Salimian Rizi and Mohammad Hossein, Naderi

Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan

Abstract- In this paper, the generation of non-classical state for the cavity field is investigated by controlling the Lamb-Dicke parameter. It is shown that although there is no apparently non-linear characteristic in the Hamiltonian within the first order of the Lamb-Dicke approximation, when the effective Hamiltonian is obtained, the system shows an inherent non-linearity. By using the superoperator method, the analytical expression for the density operator is obtained and then the atomic population inversion is analysed. Moreover, by using the dynamical evolution and analysing the Q-distribution function of the field, the non-classical properties of the radiation field is investigated. We show that the quadrature squeezing field will occur for one of the quadrature field components.

Keywords: Cavity quantum electrodynamics, the squeezing of quadrature component of the field, the system of a trapped atom, the collapse and the revival of Rabi oscillations

پهنهای بسته موج اتمی خیلی کوچکتر از طول موج لیزر باشد به طوری که، $k\Delta x \ll 1$ (عدد موج مربوط به لیزر است) در این وضعیت با رژیم موسوم به لمب-دیک سروکار داریم [۲]، بنابراین

$$\eta\sqrt{2\langle m \rangle + 1} \ll 1, \quad (1)$$

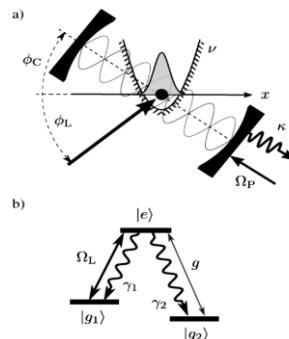
که در آن، $\langle m \rangle$ تعداد میانگین فونون‌های ارتعاشی سامانه و η پارامتر لمب-دیک است که با استفاده از آن، می‌توان اثرهای مکانیکی نور بر حرکت اتمی را بررسی کرد [۳]. دومین فرض آن است که تعداد میانگین فوتون‌های اولیه درون کواکس خیلی کوچکتر از واحد باشد تا از قوع آثار کوانتمویی محض اطمینان یابیم. این دو فرض در کنار یکدیگر شرایطی را فراهم می‌سازد که بتوانیم هامیلتونی سامانه را بسط دهیم و آن را در رژیم اختلالی بررسی کنیم. بسط را تا مرتبه اول بر حسب پارامتر η انجام می‌دهیم و با توجه به این که، در این مرتبه از بسط با گذارهای تک فونونی برای درجه آزادی خارجی اتم روبرو هستیم هامیلتونی سامانه عبارت خواهد بود از

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + O(\eta^2), \quad (2)$$

به طوری که، \hat{H}_0 و \hat{H}_1 به ترتیب هامیلتونی‌های متناظر با مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی اول بر حسب پارامتر η هستند که شکل آنها در مرجع [۴] یافت می‌شود. در مرتبه‌ی صفر بر حسب η درجه‌ی آزادی داخلی اتم از درجه‌ی آزادی خارجی اتم و اجفتهای می‌شود که معیار آن زمان رسیدن به حالت ایستا است در حالی که، در مرتبه‌ی اول حرکت مرکز جرم اتم و لیزر با یکدیگر جفت می‌شوند و درنتیجه درهم‌تنیدگی برای سامانه اتفاق می‌افتد. می‌توان با کنترل درجه‌ی آزادی داخلی اتم، درجه‌ی آزادی خارجی اتم را به سمت یک حالت مشخص (حالت عددی یا حالت چلاند) هدایت کرد و بدین ترتیب مهندسی حالت کوانتمویی انجام داد [۵]. هامیلتونی مؤثر برای مرتبه‌ی اول بر حسب η بر اساس تبدیل یکانی $\hat{U}(t, 0) = \text{Exp}\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t\right]$ به صورت زیر بدست می‌آید

۱- مقدمه

الکترودینامیک کوانتموی درون کواکس حوزه‌ای از اپتیک کوانتموی است که به مطالعه‌ی برهمنکنش تک اتم یا هنگرددی از اتم‌ها با یک یا چند مد میدان داخل کواکس می‌پردازد [۱]. در این مقاله به بررسی امکان اثرهای غیرخطی در برهم‌کنش از طریق کنترل پارامتر لمب-دیک، که عموماً از طریق کنترل پهنا و عمق پتانسیل دام صورت می‌گیرد می‌پردازیم. در ادامه، ابتدا به معرفی الگوی فیزیکی سامانه مورد مطالعه می‌پردازیم و سپس به تحلیل رفتار وارونی جمعیت اتمی وتابع توزیع \mathcal{Q} میدان خواهیم پرداخت. سرانجام امکان بروز چلاندگی یکی از مؤلفه‌های کوادراتوری میدان را نشان خواهیم داد.



شکل ۱: الگوی فیزیکی سامانه.

۲- الگوی فیزیکی سامانه

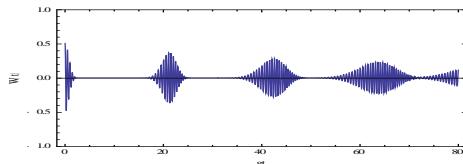
مطابق شکل (۱) سامانه مورد مطالعه شامل یک اتم با جرم M و با پیکربندی Λ است که درون یک بازاوگر اپتیکی تحت تأثیر یک پتانسیل دام هماهنگ قرارگرفته است. گذار دوقطبی اتمی $|e\rangle \leftrightarrow |g_1\rangle \leftrightarrow |g_2\rangle$ توسط لیزر کنترل با بسامد رایی Ω_L رانده می‌شود درحالی‌که، گذار درجه‌ی آزادی η با مدد بازاوگر اپتیکی با بسامد Ω_P از طریق لیزر پمپ با بسامد M و بسامد رایی Ω_R جفت می‌شود. حالت برانگیخته با پهنهای طبیعی تابشی γ به حالت $|g_j\rangle$ فروافت می‌کند به طوری که $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$. ولیکن، برای آنکه در سامانه پراکندگی تک فوتونی اتفاق افتد و از تزریق نوفه اضافی به لیزر پمپ خودداری کرده باشیم و نیز برای ساده‌تر شدن محاسبات از فروافت γ_1 چشم پوشی می‌کنیم. دو فرض اساسی که برای توصیف سامانه در نظر می‌گیریم بدین صورت است که اولاً، اتم به گونه‌ای درون دام محدود شده باشد که

نابودی (t_c) و زمان بازآفرینش (t_r) نوسانات رای را با توجه به نمودار (t) $W^{(1)}$ به صورت تقریبی و مقدار آنها را با رابطه‌های تحلیلی که نحوه بدبست آوردن آنها در مرجع [۹] ذکر شده مقایسه کرده و نتایج را با نمودار وارونی جمعیت مرتبه صفر ۷/۰ می‌سنجدیم

$$t_r = \frac{2\pi m}{\sqrt{4\eta^2 g^2 \sin^2 \varphi(\bar{n}+2) + \delta_{c2}^2} - \sqrt{4\eta^2 g^2 \sin^2 \varphi(\bar{n}+1) + \delta_{c2}^2}},$$

$$t_c = \frac{\sqrt{4\eta^2 g^2 \sin^2 \varphi(\bar{n}+1) + \delta_{c2}^2}}{2\eta g^2 \sin^2 \varphi \sqrt{\bar{n}}}.$$
(۵)

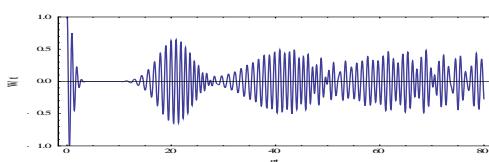
که در آن \bar{n} تعداد میانگین فوتون‌های اولیه‌ی میدان کاواک است. همانطور که از شکل (۳) پیداست در حد میدان‌های ضعیف و در حضور تقریب مرتبه‌ی اول پارامتر ۷ پوش‌های نوسانی بیشتر و همچنین با گذشت زمان پدیده‌های نابودی و بازآفرینش نوسانات رای درهم می‌روند.



شکل ۲: نمودار وارونی جمعیت اتمی در مرتبه‌ی صفر ۷ که در آن پارامترها به صورت زیرانتخاب شده‌اند:

$$\varphi = \frac{\pi}{3}, \phi_L = \phi_C = 0, \Omega_L = 2.8 MHz, \Omega_P = 2.8 MHz, \bar{n} = 0.08,$$

$$\Delta = 6 MHz, \delta_1 = 20 MHz, \delta_{C2} = 12 MHz, g = 3.6 MHz$$



شکل ۳: نمودار وارونی جمعیت اتمی در مرتبه‌ی اول ۷ که پارامترها $m = 0.07, \eta = 0.1$ و بقیه هم مانند شکل بالا انتخاب شده‌اند.

با مقایسه نمودارهای وارونی جمعیت در مرتبه‌ی اول ۷ با نمودار مرتبه‌ی صفر ۷/۰ می‌بینیم که حضور پارامتر ۷ باعث کاهش زمان‌های t_r و t_c می‌گردد. از مقایسه‌ی این زمان‌ها با رفتار دینامیکی ویژگی‌های میدان تابشی می‌توان امکان بروز اثرهای غیرکلاسیک را برای میدان تحقیق نمود.

$$\hat{H}_{eff}^{(1)} = \frac{\hbar \Omega_P \sin \varphi}{2\Delta} \eta \cos \varphi_C (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) (\hat{a}^2 \hat{\sigma}_{eg_2} + \hat{a}^{\dagger 2} \hat{\sigma}_{g_2 e})$$

$$+ \frac{\hbar \Omega_P \Omega_L}{4\delta_1} \eta \cos \varphi_L (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_{eg_1} + \hat{\sigma}_{g_1 e})$$

$$+ \frac{\hbar g^2 \sin^2 \varphi}{\delta_{C2}} \eta^2 \cos^2 \varphi_C (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{g_2 g_2})$$

$$+ \frac{\hbar \Omega_L^2}{4\delta_1} \eta^2 \cos^2 \varphi_L (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2 (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{g_1 g_1}).$$
(۳)

که در آن، φ_L و φ_C هندسه‌ی کاواک و لیزر را نسبت به محور حرکت اتم، φ جابجایی مرکز دام نسبت به مبدأ را نشان می‌دهندشکل (۱) و g ثابت جفت‌شدگی اتم با میدان کاواک است. همچنین \hat{a} و \hat{b} به ترتیب عملگرهای نابودی مربوط به فoton و فونون حرکت ارتعاشی اتم هستند، $\Delta = \omega_P - \omega_C$ = ω_D وادنیدگی بین لیزر گمانه و میدان کاواک، $\delta_1 = \omega_L - (\omega_e - \omega_{g_1})$ وادنیدگی بین لیزر کنترل $\delta_{C2} = \omega_C - (\omega_e - \omega_{g_2})$ وگزار دوقطبی اتمی $|e\rangle \leftrightarrow |g_1\rangle$ و $|e\rangle \leftrightarrow |g_2\rangle$ وادنیدگی بین میدان کاواک و گزار دوقطبی اتمی $|e\rangle \leftrightarrow |g_1\rangle$ است. در هامیلتونی مؤثر جملات غیرخطی به صورت گزارهای دوفوتونی و دو فونونی و نیز جملات پاد جینز-کامینگز ظاهر شده است. با بهره گرفتن از $\hat{H}_{eff}^{(1)}$ معادله‌ی اصلی را بدست آورده و با استفاده از روش ابرعملگرها [۷] و با فرض این‌که حالت اولیه‌ی میدان داخل کاواک حالت همدوس و حالت اولیه‌ی ارتعاشی حرکت اتمی حالت خلاً باشد، شکل زیر را برای (t) بدست می‌آوریم

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{eff}^{(1)}, \hat{\rho}] + \hat{L} \hat{\rho},$$

$$\hat{\rho}^{(1)}(t) = e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t} e^{\hat{C}t} e^{\hat{D}t} e^{\hat{E}t} e^{\hat{J}t} e^{\hat{K}t} \hat{\rho}(0),$$

$$\hat{A} \hat{\rho} = -i\xi[\eta(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)(\hat{a}^2 \hat{\sigma}_{eg_2} + \hat{a}^{\dagger 2} \hat{\sigma}_{g_2 e}), \hat{\rho}],$$

$$\hat{B} \hat{\rho} = -i\nu[\eta(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} \hat{\sigma}_{eg_1} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{g_1 e}), \hat{\rho}],$$

$$\hat{C} \hat{\rho} = -i\nu[\eta(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} \hat{\sigma}_{g_1 e} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{eg_1}), \hat{\rho}],$$

$$\hat{D} \hat{\rho} = -i\chi[\eta^2 (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2 (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{g_1 g_1}), \hat{\rho}],$$

$$\hat{E} \hat{\rho} = -i\beta[\eta^2 (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{g_2 g_2}), \hat{\rho}],$$

$$\hat{J} \hat{\rho} = 2\kappa \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger,$$

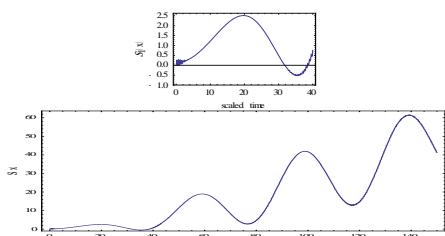
$$\hat{K} \hat{\rho} = -\kappa \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \kappa \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}.$$
(۴)

که κ آهنگ فرار فoton از درون کاواک و پارامترهای قبل از روابط جابه‌جاگری در $\hat{H}_{eff}^{(1)}$ معرفی شده‌اند.

۲-۱-تحول زمانی وارونی جمعیت اتمی

با استفاده از (t) $\hat{\rho}^{(1)}$ وارونی جمعیت اتمی، $W(t) = \langle \hat{\sigma}_z \rangle = Tr(\hat{\rho}^{(1)}(t) \hat{\sigma}_z)$ را محاسبه و نمودار آن را رسم می‌کنیم (مقادیر مربوط به پارامترهای لازم برای رسم نمودارها از مرجع [۸] انتخاب شده است). زمان

آن را با نمودار تابع Q مقایسه کنیم (شکل:۴-پ) کشیدگی لالکها را نیز در این زمان مشاهده می‌کنیم.



شکل:۵: چلاندگی مؤلفه‌ی اول کوادراتوری میدان.

۳-نتیجه‌گیری

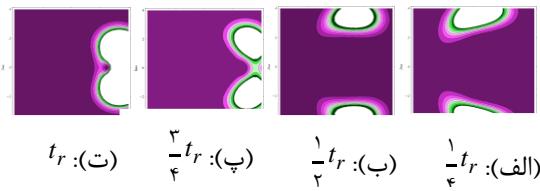
همانطور که نشان دادیم، در سامانه‌ی اتم به دام افتاده درون کواک با کنترل پارامتر لمب-دیک در برهم‌کنش اتم-فوتون، سامانه از خود یک غیرخطیت ذاتی نشان داد. نمودار $W^{(1)}(t)$ نشان داد که در تقریب مرتبه‌ی اول پارامتر η پدیده‌های نابودی و بازآفرینش نوسانات رابی سریع‌تر اتفاق می‌افتد. رفتار دینامیکی تابع توزیع Q در t_r -یک برهم‌نهی همدوس از دو حالت چلاندگی و در زمان t_r -چلاندگی مؤلفه‌ی اول کوادراتوری میدان را نشان داد.

مراجع

- [1] S. Haroche, J. M. Raimond *Exploring the Quantum*, Oxford University Press, Oxford, 2006
- [2] J. Eschner, G. Morigi, F. Schimdt-Kaler, R. Blatt, *Laser cooling of trapped ions*, 20 1003, J. Opt. Soc. A, 2003
- [3] S. Stenholm, *Semiclassical theory of laser cooling*, 58 699, Rev. Mod. Phys, 1986
- [4] M. Bienert, G. Morigi, Cavity cooling of a trapped atom using Electromagnetically Induced Transparency, 14 023002, New. J. Phys, 2012
- [5] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Winel *Generation of Nonclassical Motional states of a Trapped atom*, 76 11, Phys. Rev. Lett, 1995
- [6] W. Vogel, and Dirk-Gunner Welsch *Quantum Optics*, WILEY-VCH, 2003
- [7] H. Moya-Cessa, Decoherence in atom-field interactions:A treatment using Superoperator techniques, 432 1-41, Phys. Rep. 2006
- [8] T. Kampschulte, W. Alt, S. Brakhane, M. Eskstein, R. Reinmann, A. Widera, and D. Meschede, *Optical control of the refractive index of a single atom*, 105 153603, Phys. Rev. Lett, 2010
- [9] M. O. Scully, and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* Cambridge University Press 1997
- [10] C. C. Gerry, P. L. knight, *Introductory Quantum Optics* Cambridge University Press 2005

۴-۲-تابع توزیع فضای فاز $Q(\alpha, \alpha^*, t)$

در شکل (۴) تحول دینامیکی تابع $Q(\alpha, \alpha^*, t)$ را در صفحه‌ی مختلط (α, α^*) برای زمان‌های متفاوت رسم کردہ‌ایم. با توجه به نمودار (t) می‌بینیم که شکافتگی به دو لالک در زمان t_r اتفاق می‌افتد (شکل:۴-الف) که بیانگر حضور همدوسی در سامانه است. در زمان t_r -دو لالک دقیقاً در مقابل یکدیگر قرار می‌گیرند که نشان می‌دهد میدان در یک برهم‌نهی همدوس از دو حالت چلاندگی قرار دارد (شکل:۴-ب)، و در زمان t_r -پ (شکل:۴-پ) کشیدگی دو لالک شروع می‌افتد و درست در زمان t_r (شکل:۴-ت) دو لالک شروع به فروافتتن در یکدیگر می‌کند که نشان دهنده‌ی وقوع واهمدوسی در سامانه است.



شکل:۴: تحول دینامیکی تابع Q که در آن از پارامترهای شکل (۳) برای رسم استفاده کرده‌ایم.

۴-۳-چلاندگی مؤلفه‌ی کوادراتوری میدان

یکی از ویژگی‌های غیرکلاسیک بارز میدان تابشی، چلاندگی یکی از مؤلفه‌های کوادراتوری میدان است که در این حالت نویه‌ی کوانتومی یکی از مؤلفه‌های کوادراتوری زیر حد استاندارد نویه‌ی کوانتومی خلاً قرار می‌گیرد. اگر معیار چلاندگی حالت میدان را بر مبنای $S_i(t)$ به صورت زیر تعریف کنیم [۱۰] ،

$$S_i(t) = 4 \left\langle (\Delta X_i)^2 \right\rangle - 1 \quad (5)$$

آنگاه زمانی چلاندگی اتفاق می‌افتد که $S_i(t) < 0$. با رسم تابع $S_1(t)$ (شکل:۵) با پارامترهای شکل (۳) برای مؤلفه‌ی اول کوادراتوری میدان می‌بینیم که تقریباً در زمان t_r چنان‌نمودار زیر محور قرار گرفته است و این امر حاکی از آن بوده که چلاندگی برای این مؤلفه اتفاق افتاده است و اگر