



بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه ۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز



در همتنیدگی بین یک اتم دوترازه و حالات همدوس نور در یک کاواک غیر خطی

محمد رضا عباسی

شرکت بهره‌برداری نیروگاه اتمی بوشهر، بوشهر

دانشگاه خلیج فارس بوشهر، بوشهر

چکیده - در این مقاله تحول زمانی آن‌تروپی فون-نویمان به عنوان معیاری از درهم‌تنیدگی بین یک اتم دوترازه و حالات همدوس نور در یک کاواک مورد بررسی قرار می‌گیرد. بر هم کنش اتم و نور همدوس در حضور یک ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی روی میدهد که باعث جفتیدگی اتم-فوتون از طریق مدل جینز کامینگز خطی و خودجفتیدگی فوتونها از طریق پذیرفتاری مرتبه سوم می‌شود. با بدست آوردن عملگر تحول زمانی، آن‌تروپی فون نویمان به صورت تابعی از زمان محاسبه می‌شوند. نشان داده می‌شود که افزایش خودجفتیدگی فوتونها باعث کاهش درهم‌تنیدگی می‌شود. همچنین تاثیر ناکوکی اتم-فوتون بر درهم‌تنیدگی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

کلید واژه- درهم‌تنیدگی اتم-فوتون، حالات همدوس، ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی، آن‌تروپی فون نویمان.

Entanglement between a Two-level Atom and the Coherent Photonic States in a Nonlinear Cavity

Mohammad Reza Abbasi

Bushehr Nuclear Power Plant Operating Co.-Bushehr

Persian Gulf University of Bushehr-Bushehr

Abstract- In this paper the time evolution of von Neumann entropy as a measure of entanglement between a two-level atom and the photonic coherent states in a cavity is studied. The atom-photon interaction occurs in the presence of a centrosymmetric medium which makes the photonic cavity mode couple with itself via the third order susceptibility. In the present system the atom-photon interaction is assumed to follow the linear Jaynes-Cummings model while the photonic self-coupling is due to presence of a centrosymmetric medium and occurs via the third order susceptibility. After calculating the time-evolution operator, the von Neumann entropy, as a function of time, is determined. It is shown that an increase of photonic self-coupling leads to decreasing of entanglement. Furthermore, the role of atom-photon detuning on the entanglement behavior is also addressed.

Keywords: Atom-photon Entanglement, Coherent states, Centrosymmetric Dielectric, von Neumann Entropy

۱- مقدمه

حالات درهم‌تنیده نقش برجسته‌ای را در زمینه‌های مختلف تئوری اطلاعات کوانتومی مانند انتقال کوانتومی اطلاعات، محاسبات کوانتومی و موارد دیگر [۲ و ۱] ایفاء می‌کنند. تحقیقات در زمینه درهم‌تنیدگی کوانتومی معمولاً بر روی دو مبحث ایجاد و اندازه‌گیری آن متمرکز شده است. یکی از راه‌های ایجاد در هم‌تنیدگی به منظور پردازش کوانتومی استفاده از برهم‌کنش یک اتم به عنوان کیوبیت با مدهای یک کاواک اپتیکی برای ایجاد درهم‌تنیدگی‌های اتم-اتم و اتم-فوتون می‌باشد [۳ و ۴]. از این میان با استفاده از حالات درهم‌تنیده پروتکل‌هایی جهت انتقال کوانتومی اطلاعات ارائه شده است [۵]. ایجاد این حالات بین اتم‌ها به عنوان کیوبیت‌هایی که می‌توانند اطلاعات را در خود ذخیره نمایند با فوتون‌ها به عنوان منتقل‌کننده این اطلاعات، اهمیت پرداختن به درهم‌تنیدگی اتم-فوتون را چندین برابر می‌کند. از این بین با توجه به کمترین میزان عدم قطعیت حالات همدوس فوتونی (Photonic Coherent States) و شباهت‌های آنها به نور کلاسیکی (در چارچوب‌های مکانیک کوانتومی) بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی بین اتم و حالات همدوس فوتونی مهم ارزیابی می‌گردد.

برهم‌کنش اتم-فوتون معمولاً در حلاء مورد مطالعه قرار می‌گیرد اما برای کاربردهایی مانند سوییچینگ اپتیکی [۶] و مدولاسیون و انتخاب فرکانس [۷] وجود دی‌الکتریک در داخل کاواک اجتناب‌ناپذیر است. از طرف دیگر همدوسی فوتونی باعث ایجاد اثرات مهمی مانند فروهش و نمو (Collapse and Revival) در وارونگی جمعیت اتمی می‌شود [۸]. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که در برهم‌کنش اتم و فوتون‌ها، که در اینجا به صورت برهم‌کنش خطی جینز-کامینگز در نظر گرفته می‌شود، اثرات برهم‌کنش‌های غیرخطی بین فوتون‌ها با خود را که بدلیل وجود ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی بوجود می‌آید و اثر خود جفتیدگی کر شکل (Kerr self-coupling) شناخته می‌شود نیز منظور گردد [۹].

در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی بین یک اتم دوترازه و حالات همدوس فوتونی در یک کاواک که توسط یک ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی پر شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. نشان داده می‌شود که این درهم‌تنیدگی دارای

رفتار فروهش و نمو است که دامنه و زمان این فروهش و نمو‌ها وابسته به مقدار ناکوکی (Detuning) بین اتم-فوتون و خودجفتیدگی فوتونها می‌باشند.

به منظور بررسی درهم‌تنیدگی در این سیستم ابتدا هامیلتونی حاکم بر مساله مورد بحث ارائه و هامیلتونی در تصویر برهم‌کنش بدست می‌آید. با حل معادله شرودینگر در این تصویر، عملگر تحول زمانی محاسبه می‌گردد. با اعمال عملگر تحول زمانی بر حالت اولیه که به صورت حالات همدوس فوتونی در نظر گرفته می‌شود تحول زمانی حالت اولیه بدست می‌آید. در آخر آنتروپی فون نویمان چگالی بدست آمده و تاثیرات ناکوکی، خودجفتیدگی فوتونها بر درهم‌تنیدگی بین اتم و حالات همدوس فوتونی مطالعه می‌گردد. همانطور که از هامیلتونی غیر خطی بر می‌آید خودجفتیدگی فوتونها به صورت غیر خطی میدان فوتونی را جفت کرده که باعث کاهش گذار بین حالات اتمی از طریق افزایش جفتیدگی بین فوتونها می‌شود. همچنین افزایش ناکوکی باعث کاهش احتمال گذار بین ترازهای اتمی و درنهایت کاهش درهم‌تنیدگی خواهد شد. این مقاله به صورت زیر پیکر بندی می‌شود: در بخش بعد هامیلتونی سیستم معرفی می‌شود. سپس عملگر تحول زمانی برای این سیستم محاسبه می‌گردد. در آخر بعد از مروری بر آنتروپی فون-نویمان، نقش ناکوکی و پذیرفتاری مرتبه سوم بر درهم‌تنیدگی بین اتم و حالات همدوس فوتونی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- هامیلتونی سیستم

برهم‌کنش یک اتم دوترازه با تراز بالای $|a\rangle$ و تراز پایین $|b\rangle$ با حالت همدوس فوتونی یک کاواک که با یک ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی پر شده است را در نظر می‌گیریم. هامیلتونی این سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$H = H_a + H_f + H_{af} \quad (1)$$

که H_a ، H_f و H_{af} به ترتیب هامیلتونی اتمی، میدان و برهم‌کنش اتم-فوتون می‌باشند و عبارتند از $(\hbar = 1)$ ،

$$H_a = \frac{\omega_0}{2} \sigma_z \quad (2)$$

$$U_{bb}(t) = e^{i\frac{\Gamma}{2}t} \left[\cos\Delta_- t + i \left(\frac{\Gamma}{2} \right) \frac{\sin\Delta_- t}{\Delta_-} \right] \quad (13)$$

$$U_{ab}(t) = -igae^{i\frac{\Gamma}{2}t} \frac{\sin\Delta_- t}{\Delta_-} \quad (14)$$

که در آن

$$\Delta_+ = \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2} + \chi\right)^2 + g^2(a^\dagger a + 1)} \quad (15)$$

$$\Delta_- = \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + g^2 a^\dagger a} \quad (16)$$

۴- درهم‌تنیدگی بین اتم و حالات همدوس فوتونی

آنروپی فون-نویمان برای ترکیب دو زیرسیستم A و B، که در اینجا حالات اتمی و حالات همدوس فوتونی می باشند، به صورت زیر،

$$S_{vN}(\rho_{AB}) = -Tr(\rho_{AB} \log_2 \rho_{AB}) \quad (17)$$

تعریف شده و درهم‌تنیدگی از رابطه،

$$E = S_{vN}(\rho_A) = S_{vN}(\rho_B) = -Tr(\rho_A \log_2 \rho_A) = -Tr(\rho_B \log_2 \rho_B) \quad (18)$$

بدست می آید که در آن $\rho_{A(B)} = Tr_{B(A)}(\rho_{AB})$ چگالی کاهش یافته می باشد. برای یک سیستم جداپذیر درهم-تنیدگی صفر است یعنی کلیه اطلاعات راجع به زیرسیستم ها در دسترس می باشد این در حالیست که برای حالات درهم‌تنیده بیشینه این مقدار برابر با یک است [۱۰] یعنی اطلاعات به صورت مساوی بین زیرسیستم ها تقسیم شده است. حالت اولیه سیستم را به صورت $|\alpha, a\rangle$ را در نظر میگیریم که $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle$ معرف حالت همدوس فوتونی است و تعداد متوسط فوتونها در آن با $|\alpha|^2$ داده می شود. با استفاده از معادلات ۱۱ الی ۱۶ خواهیم داشت،

$$|\alpha, a\rangle_t = U |\alpha, a\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\left(\frac{\Delta_+}{2} + \chi n\right)t} \times \left(\left[\cos\Omega_n t + i \left(\frac{\Delta_+}{2} + \chi n \right) \frac{\sin\Omega_n t}{\Omega_n} \right] |n, a\rangle - ig \sqrt{n+1} \frac{\sin\Omega_n t}{\Omega_n} |n+1, b\rangle \right) \quad (19)$$

که ω_0 فرکانس طبیعی اتم دوترازه و σ_z مولفه سوم عملگر پائولی است و

$$H_f = \omega a^\dagger a + \chi a^{\dagger 2} a^2 \quad (3)$$

ω فرکانس میدان، χ پذیرفتاری مرتبه سوم وابسته به خود جفتیدگی کر و $a(a^\dagger)$ عملگر نابودی (خلق) فوتونی و

$$H_{af} = g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \quad (4)$$

که g ضریب جفتیدگی بین اتم-فوتون و $\sigma_+(\sigma_-)$ عملگرهای بالا/پایین برنده (پایین برنده) پائولی برای یک اتم دوترازه می باشند.

۳- عملگر تحول زمانی

هامیلتونی برهم کنش در پایه های اتمی به صورت زیر داده می شود،

$$H = \begin{pmatrix} 0 & gae^{-i\Gamma t} \\ ge^{i\Gamma t} a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

که در آن $\Delta = \omega - \omega_0$ و $\Gamma = \Delta + 2\chi(a^\dagger a - 1)$ معرف ناکوکی می باشند. با استفاده از معادله حرکت، $i\frac{dU}{dt} = HU$ با جایگذاری ماتریس تحول زمانی،

$$U = \begin{pmatrix} U_{aa} & U_{ab} \\ U_{ba} & U_{bb} \end{pmatrix} \quad (6)$$

چهار معادله جفت شده،

$$i\dot{U}_{aa} = gae^{-i\Gamma t} U_{ba} \quad (7)$$

$$i\dot{U}_{ab} = gae^{-i\Gamma t} U_{bb} \quad (8)$$

$$i\dot{U}_{ba} = ge^{i\Gamma t} a^\dagger U_{aa} \quad (9)$$

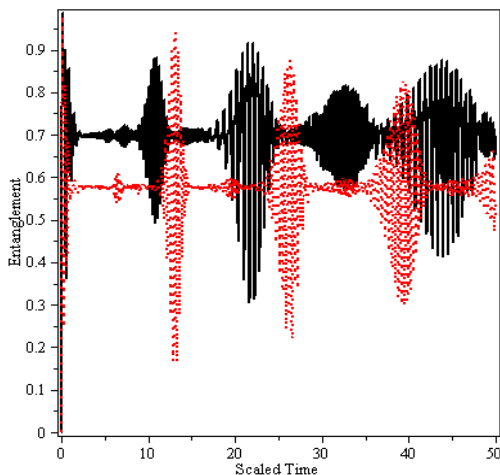
$$i\dot{U}_{bb} = ge^{i\Gamma t} a^\dagger U_{ab} \quad (10)$$

می رسمیم که با شرط اولیه $U(0) = 1$ و بعد از یک مشتق گیری مجدد به صورت زیر حل می شوند،

$$U_{aa}(t) = e^{-i\left(\frac{\Gamma}{2} + \chi\right)t} \left[\cos\Delta_+ t + i \left(\frac{\Gamma}{2} + \chi \right) \frac{\sin\Delta_+ t}{\Delta_+} \right] \quad (11)$$

$$U_{ba}(t) = -ige^{i\frac{\Gamma}{2}t} a^\dagger \frac{\sin\Delta_+ t}{\Delta_+} \quad (12)$$

و دو مد همدوس فوتونی، است که در آن آنتروپی دارای رفتار نوسانی است. متوسط درهم‌تنیدگی بین اتم و حالات همدوس فوتونی با افزایش خودجفتیدگی بین فوتونها و ناکوکی اتم و فوتونها کاهش می‌یابد. همچنین افزایش ناکوکی و خودجفتیدگی بین فوتونها باعث کاهش زمان فروزش می‌شوند.



شکل ۲- درهم‌تنیدگی زمانی اتم-فوتون برای مقادیر $\chi = 20$ ، $|\alpha|^2 = \langle n \rangle = 0.1g$ و مقادیر مختلف $\Delta = 2g$ (خط ممتد)، $\Delta = 6g$ (نقطه چین)

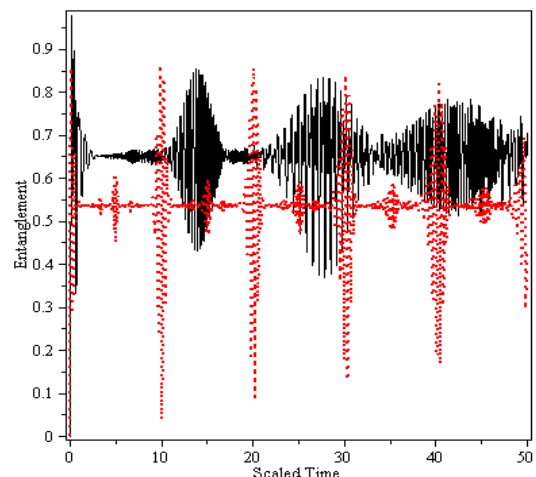
مراجع

- [۱] S. Olmschenk et al, "Quantum teleportation between distant matter qubits" *Science*, **323** pp.486, 2009.
- [۲] R. Raussendorf and H.J. Briegel, "A One-way quantum computer", *Phys. Rev. Lett.* **86**, pp.5188, 2001.
- [۳] J.M. Raimond, M. Brune and S Haroche, "Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity", *Rev. Mod. Phys.*, **73** pp.565, 2001.
- [۴] M.S. Abdalla, J. Krepelka and J Perina, "Effect of Kerr-like medium on a two-level atom in interaction with bimodal oscillator", *J.Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39**, pp.1563, 2006.
- [۵] M. B. Plenio and V. Vedral, *Contemporary Physics*, **39**, number 6, pages 431, 1998.
- [۶] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics* Third edition Academic press 2008
- [۷] W. Demtroder, *Laser Spectroscopy* Third edition Springer 2002
- [۸] M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics* Cambridge University Press, 1997
- [۹] M.R. Abbasi and M.M. Golshan, "Dynamics of photon-photon entanglement in a bimodal nonlinear nanocavity", *Opt. Comm.*, **285** pp 3982, 2012
- [۱۰] R. Safaiee, M.M. Golshan and N. Foroozani, "Entanglement between electronic spin and subband states", *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, doi:10.1088/1742-5468/2009/11/ P11014, 2009.

که در آن $\Omega_n = \Delta_+(n)$ می‌باشد. حال با گرفتن رد جزئی از عملگر چگالی $\rho(t) = |\alpha, a\rangle_t \langle \alpha, a|$ و قرار دادن نتایج بدست آمده در معادله (۱۸) درهم‌تنیدگی از رابطه زیر

$$S_{VN}(t) = \frac{-e^{-|\alpha|^2}}{\ln 2} \sum_n \frac{\alpha^{2n}}{n!} \times [(f(n,t)) \ln(f(n,t)) + (1-f(n,t)) \ln(1-f(n,t))] \quad (20)$$

بدست می‌آید که در آن $f(n,t) = \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \sin^2 \Omega_n t$ است. ضریب خودجفتیدگی بین فوتون‌ها باعث جفت‌شدگی حالات فوتونی می‌گردد همچنین ناکوکی باعث کاهش احتمال گذار اتم می‌شود. بنابراین قابل انتظار خواهد بود اگر یکی یا هر دوی این پارامترها افزایش یابند متوسط درهم‌تنیدگی کاهش یابد. در شکل ۱ و ۲ که درهم‌تنیدگی به صورت تابعی از زمان (gt) برای مقادیر مختلف خودجفتیدگی فوتونها و ناکوکی بین اتم و فوتون نشان داده شده است، این گفته را تایید می‌نماید. همچنین درهم‌تنیدگی با فرکانس رابی $\Omega_n = \Delta_+(n)$ نوسان می‌کند. علاوه بر آن از اشکال ۱ و ۲ می‌توان نتیجه گرفت که افزایش خودجفتیدگی فوتونها و ناکوکی بین اتم و فوتون باعث کاهش زمان فروزش می‌گردند.



شکل ۱- درهم‌تنیدگی زمانی اتم و حالات همدوس فوتونی برای مقادیر $\chi = 0.03g$ (خط ممتد)، $\chi = 0.3g$ (خط نقطه چین) و مقادیر مختلف $\Delta = 2g$ ، $|\alpha|^2 = \langle n \rangle = 20$

۵- نتیجه گیری

درهم‌تنیدگی معرفی شده در این مقاله (معادله ۲۰) دارای رفتار فروزش و نمو است که این رفتار بر خلاف نوسان آنتروپی سیستم مقاله [۴]، درهم‌تنیدگی بین اتم دوترازه