بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
خوزستان، ایران.
۱۴-۱۲ بهمن ۱۴۰۰

دینامیک درهم‌تنیدگی برهم‌کنش دو کیوتریت با یک میدان کوانتیده دومد: بدون تقریب موج چرخان

فرشید جهان‌بخش، محمدکاظم توسلی

گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد
f.jahanbakhsh@stu.yazd.ac.ir
mktavassoly@yazd.ac.ir

چکیده- با درنظرگرفتن سامانه‌ای متشکل از دو کیوتریت (اتم سه‌ترازی Λ -شکل) در برهم‌کنش با یک میدان کوانتیده دومد در یک کاواک با ضریب کیفیت بالا و در حضور جملات پادچرخان، معادله شرودینگر وابسته به زمان را برای سامانه‌ی ذکرشده حل می‌کنیم. پس از به‌دست‌آوردن حالت سامانه، آنتروپی خطی را برای این سامانه (به منظور بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی زیرسامانه‌های مختلف در حضور و غیاب تقریب موج چرخان) محاسبه می‌کنیم. نتایج عددی ما نشان می‌دهد که مرگ و سپس احیای درهم‌تنیدگی در بعضی موارد اتفاق می‌افتد. همچنین پدیده‌های فروافت-احیاء نیز در این بررسی‌ها به وضوح قابل مشاهده است، که تعداد این پدیده‌ها و بنابراین نوسانات درهم‌تنیدگی، متناسب با انتخاب مقادیر مختلف برای پارامترهای موثر در مدل مورد نظر (در غیاب تقریب موج چرخان نسبت به حضور آن) می‌تواند تغییر کند. علاوه بر این، درهم‌تنیدگی تقریباً پایدار را می توان در برخی شرایط خاص مشاهده کرد.

کلید واژه- آنتروپی خطی، تقریب موج چرخان، درهم‌تنیدگی کوانتومی، مدل جینز-کامینگز.

Entanglement dynamics of two qutrits interacting with a two-mode quantized field: beyond the rotating wave approximation

F. Jahanbakhsh, M. K. Tavassoly

Optics and Laser Group, Faculty of Physics, Yazd University
f.jahanbakhsh@stu.yazd.ac.ir
mktavassoly@yazd.ac.ir

Abstract- Considering a system consisting of two qutrits (Λ -type three-level atoms) interacting with a two-mode quantized field in a high quality cavity and in the presence of counter rotating terms, we solve the time-dependent Schrödinger equation for the mentioned system. Then, we calculate the linear entropy (in order to investigate the entanglement dynamics of different subsystems in the presence and absence of a rotating wave approximation) for this system. Our numerical results show that death and then birth of entanglement occur in some cases. Also, the collapse-revival phenomena are clearly visible in these studies, which the number of them and thus entanglement fluctuations, can be changed according to the different chosen values for the effective parameters in the desired model (in the absence of a rotating wave approximation relative to its presence). In addition, nearly stable entanglement can be observed in some particular conditions.

Keywords: Linear entropy, Rotating wave approximation, Quantum entanglement, Jaynes-Cummings model.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

مقدمه: مدل جینز-کامینگز استاندارد به عنوان یکی از ساده‌ترین مدل‌های توصیف‌کننده درهم‌تنیدگی (یکی از جالب‌ترین جنبه‌های غیرکلاسیک مکانیک کوانتومی) [۱]، برهم‌کنش بین یک اتم دوترازی با یک میدان کوانتیده تک‌مد را توصیف می‌کند [۲]. این مدل با تقریب موج چرخان همراه است، که تنها در شرایط جفت‌شدگی اتم-میدان ضعیف معتبر است. در این شرایط به دلیل اضافه‌شدن جملات آنتی جینز-کامینگز (پادچرخان)، معادلات بسته نمی‌شوند و بنابراین به صورت تحلیلی قابل حل نخواهند بود. با این حال، اخیرا برای یک کیوتریت در برهم‌کنش با یک میدان کوانتیده تک‌مد و همچنین دومد بدون تقریب موج چرخان روش تحلیلی مناسبی براساس نظریه اختلال ارائه شده است [۳,۴]. در مقاله حاضر، با الگوگرفتن از این روش و تعریف یک هامیلتونی موثر وابسته به شدت برای برهم‌کنش دو کیوتریت با یک میدان دومد، معادله شرودینگر وابسته به زمان را حل کرده و سپس دینامیک درهم‌تنیدگی زیرسامانه‌های مربوط به سامانه مورد نظر را بررسی می‌کنیم.

مدل فیزیکی سامانه: به عنوان تعمیمی از کار صورت‌گرفته در مراجع [۳,۴]، سامانه‌ای متشکل از دو کیوتریت با ترازهای برانگیخته $|a\rangle$ ($|a'\rangle$) و حالت‌های پایه $|b\rangle,|c\rangle$ ($|b'\rangle,|c'\rangle$) به ترتیب برای کیوتریت اول (دوم) دربرهم‌کنش با یک میدان کوانتیده دومد را در نظر می‌گیریم. هامیلتونی مربوط به این سامانه بدون تقریب موج چرخان به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\hat{H}=\hat{H}_{free}+\hat{H}_{RWA}+\hat{H}_{CRT} \qquad (۱)$$

به طوری که:

$$\hat{H}_{free}=\nu_1\hat{a}^\dagger\hat{a}+\nu_2\hat{b}^\dagger\hat{b}+\sum_j E_j\hat{\sigma}_{jj},\ j=a,b,c,a',b',c'$$

$$\hat{H}_{RWA}=g_1\left(\hat{a}\hat{\sigma}_{ab}^{+}+\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ab}^{-}\right)+g_2\left(\hat{b}\hat{\sigma}_{ac}^{+}+\hat{b}^\dagger\hat{\sigma}_{ac}^{-}\right)+g_1'\left(\hat{a}\hat{\sigma}_{a'b'}^{+}+\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{a'b'}^{-}\right)+g_2'\left(\hat{b}\hat{\sigma}_{a'c'}^{+}+\hat{b}^\dagger\hat{\sigma}_{a'c'}^{-}\right)$$

$$\hat{H}_{CRT}=g_1\left(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ab}^{+}+\hat{a}\hat{\sigma}_{ab}^{-}\right)+g_2\left(\hat{b}^\dagger\hat{\sigma}_{ac}^{+}+\hat{b}\hat{\sigma}_{ac}^{-}\right)+g_1'\left(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{a'b'}^{+}+\hat{a}\hat{\sigma}_{a'b'}^{-}\right)+g_2'\left(\hat{b}^\dagger\hat{\sigma}_{a'c'}^{+}+\hat{b}\hat{\sigma}_{a'c'}^{-}\right)$$

(۲)

که $\hat{a}$ ($\hat{b}$) و $\hat{a}^\dagger$ ($\hat{b}^\dagger$) به ترتیب عملگر بوزونی نابودی و آفرینش متناظر با هر کدام از مدهای میدان اول (دوم) است. $\hat{\sigma}_{ij}^{-}$ ($\hat{\sigma}_{ij}^{+}$) عملگر پایین‌آورنده (بالابرنده) اتمی و همچنین $\hat{\sigma}_{jj}=|j\rangle\langle j|, n_1=\hat{a}^\dagger\hat{a}, n_2=\hat{b}^\dagger\hat{b}$ هستند. ضمنا ν_1 (ν_2) بسامد مربوط به مدهای میدان و g_1,g_1' (g_2,g_2') نیز ضریب جفت‌شدگی اتم-میدان مربوط به ترازهای چپ (راست) هر یک از اتم‌ها است. هامیلتونی $\hat{H}_{CRT}$ شامل جملات پادچرخان است که در شرایط بدون تقریب موج چرخان به هامیلتونی جینز-کامینگز اضافه شده است. با الگوگرفتن از [۳,۴] می‌توان به هامیلتونی موثر زیر برای سامانه مورد نظر رسید:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{eff}=&\hat{H}_0+\hat{H}_{RWA}^{(ID)}+\varepsilon_1 g_1\left\{(\hat{n}_1+\frac{1}{2})\hat{\sigma}_z^{ab}+\frac{\hat{\sigma}_{cc}}{2}-\frac{1}{2}\right\}\\&+\varepsilon_2 g_2\left\{(\hat{n}_2+\frac{1}{2})\hat{\sigma}_z^{ac}+\frac{\hat{\sigma}_{bb}}{2}-\frac{1}{2}\right\}\\&+\varepsilon_3 g_1'\left\{(\hat{n}_1+\frac{1}{2})\hat{\sigma}_z^{a'b'}+\frac{\hat{\sigma}_{c'c'}}{2}-\frac{1}{2}\right\}\\&+\varepsilon_4 g_2'\left\{(\hat{n}_2+\frac{1}{2})\hat{\sigma}_z^{a'c'}+\frac{\hat{\sigma}_{b'b'}}{2}-\frac{1}{2}\right\}\end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن $\hat{\sigma}_z^{ij}=\hat{\sigma}_{ii}-\hat{\sigma}_{jj}$. در اینجا

$$\begin{aligned}\hat{H}_{RWA}^{(ID)}=&g_1\left[f_1(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ab}^{-}+\hat{\sigma}_{ab}^{+}\hat{a}f_1(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\right]\\&+g_2\left[f_2(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\hat{b}^\dagger\hat{\sigma}_{ac}^{-}+\hat{\sigma}_{ac}^{+}\hat{b}f_2(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\right]\\&+g_1'\left[f_3(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{a'b'}^{-}+\hat{\sigma}_{a'b'}^{+}\hat{a}f_3(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\right]\\&+g_2'\left[f_4(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\hat{b}^\dagger\hat{\sigma}_{a'c'}^{-}+\hat{\sigma}_{a'c'}^{+}\hat{b}f_4(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\right]\end{aligned} \qquad (۴)$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_0=&\sum_{j=1}^{2}\nu_j\hat{n}_j+\frac{2\Delta_{ab}-\Delta_{ac}}{3}\hat{\sigma}_z^{ab}\\&+\frac{2\Delta_{ac}-\Delta_{ab}}{3}\hat{\sigma}_z^{ac}+\frac{2\Delta_{a'b'}-\Delta_{a'c'}}{3}\hat{\sigma}_z^{a'b'}\\&+\frac{2\Delta_{a'c'}-\Delta_{a'b'}}{3}\hat{\sigma}_z^{a'c'}+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2}E_i\hat{I}_i\end{aligned} \qquad (۵)$$

همچنین

$$f_1(\hat{n}_1,\hat{n}_2)=1-\varepsilon_1^2\hat{n}_1-\frac{\varepsilon_2^2}{2}\hat{n}_2,\Delta_{ab}=E_a-E_b-\nu_1,$$

$$f_2(\hat{n}_1,\hat{n}_2)=1-\varepsilon_2^2\hat{n}_2-\frac{\varepsilon_1^2}{2}\hat{n}_1,\Delta_{ac}=E_a-E_c-\nu_2,$$

$$f_3(\hat{n}_1,\hat{n}_2)=1-\varepsilon_3^2\hat{n}_1-\frac{\varepsilon_4^2}{2}\hat{n}_2,\Delta_{a'b'}=E_{a'}-E_{b'}-\nu_1,$$

$$f_4(\hat{n}_1,\hat{n}_2)=1-\varepsilon_4^2\hat{n}_2-\frac{\varepsilon_3^2}{2}\hat{n}_1,\Delta_{a'c'}=E_{a'}-E_{c'}-\nu_2,$$

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

$\hat{n}_1 = \hat{n}_1 + \frac{\hat{\sigma}_z^{ab}}{3} + \frac{\hat{\sigma}_z^{a'b'}}{3}$ ، $\hat{n}_2 = \hat{n}_2 + \frac{\hat{\sigma}_z^{ac}}{3} + \frac{\hat{\sigma}_z^{a'c'}}{3}$ ،

$\hat{I}_1 = \hat{\sigma}_{aa} + \hat{\sigma}_{bb} + \hat{\sigma}_{cc}$ ، $E_1 = E_a + E_b + E_c$ ،

$\hat{I}_2 = \hat{\sigma}_{a'a'} + \hat{\sigma}_{b'b} + \hat{\sigma}_{c'c'}$ ، $E_2 = E_{a'} + E_{b'} + E_{c'}$.

با مقایسه رابطه (۴) با (۲)، می‌توان دید که ضرایب جفت‌شدگی اتم-میدان به توابع تغییرشکل (غیرخطی) وابسته به شدت $f_i(\hat{n}_1, \hat{n}_2)$ $(i = 1,2,3,4)$ تبدیل شده است. حالت اتم-میدان اولیه را به صورت زیر برای سامانه‌ای متشکل از دو کیوتریت و دو مد میدان در نظر می‌گیریم:

$$|\psi(0)\rangle = \sin^2\alpha |a,a',0,0\rangle + \sin\alpha\cos\alpha |b,b',0,0\rangle + \cos\alpha |c,c',0,0\rangle \quad (۶)$$

که α پارامتر همدوسی اتمی است. اکنون ما با استفاده از هامیلتونی موثر $\hat{H}_{eff}$ در (۳)، معادله شرودینگر وابسته به زمان $\hat{H}_{eff}|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$ را با در نظر گرفتن زمان مقیاس‌شده $\tau = \frac{2g_1 t}{\pi}$ حل خواهیم کرد. در این مسیر به ۲۳ معادله دیفرانسیل جفت‌شده می‌رسیم که با حل آنها حالت کلی سامانه به دست می‌آید (به دلیل کمبود جا از آوردن آنها در اینجا معذوریم).

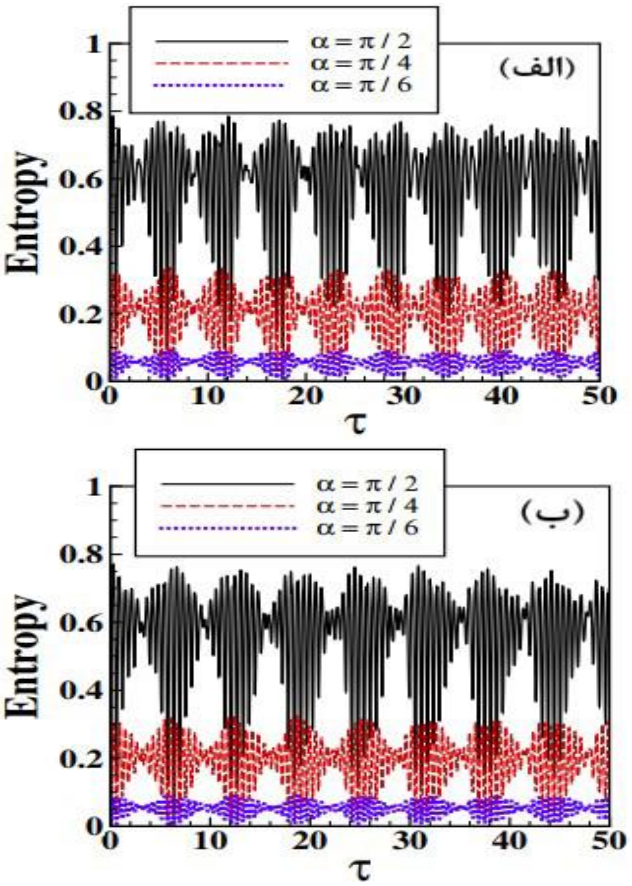
میزان درهم‌تنیدگی : ماتریس چگالی کاهش‌یافته مربوط به هر یک از زیرسامانه‌های A و B مربوط به سامانه مرکب A-B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\rho}_{A(B)}(\tau) = Tr_{B(A)}[\hat{\rho}(\tau)] \quad (۷)$$

که $\hat{\rho}(\tau) = |\psi(\tau)\rangle\langle\psi(\tau)|$. به منظور بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی مربوط به هر یک از زیرسامانه‌ها با دیگری، سنجه آنتروپی خطی برای سامانه مرکب A-B به صورت زیر تعریف می‌گردد [۵]:

$$S_{A(B)}(\tau) = 1 - Tr[\hat{\rho}^2_{A(B)}(\tau)] \quad (۸)$$

در اینجا با به دست آوردن $S_{A_1,A_2}(\tau)$ ($S_{A_1}(\tau)$) به بررسی درهم‌تنیدگی «دو کیوتریت» با «میدان دومد» («کیوتریت اول» با «کیوتریت دوم و میدان دومد») می‌پردازیم، که در آن $\hat{\rho}_{A_1,A_2}(\tau) = Tr_{F_1,F_2}[\hat{\rho}(\tau)]$ ($\hat{\rho}_{A_1}(\tau) = Tr_{A_2,F_1,F_2}[\hat{\rho}(\tau)]$). به منظور مقایسه نتایج در حضور و غیاب تقریب موج چرخان، شکل ۱ (۲) را با دو زیرشکل الف) با تقریب موج چرخان و ب)



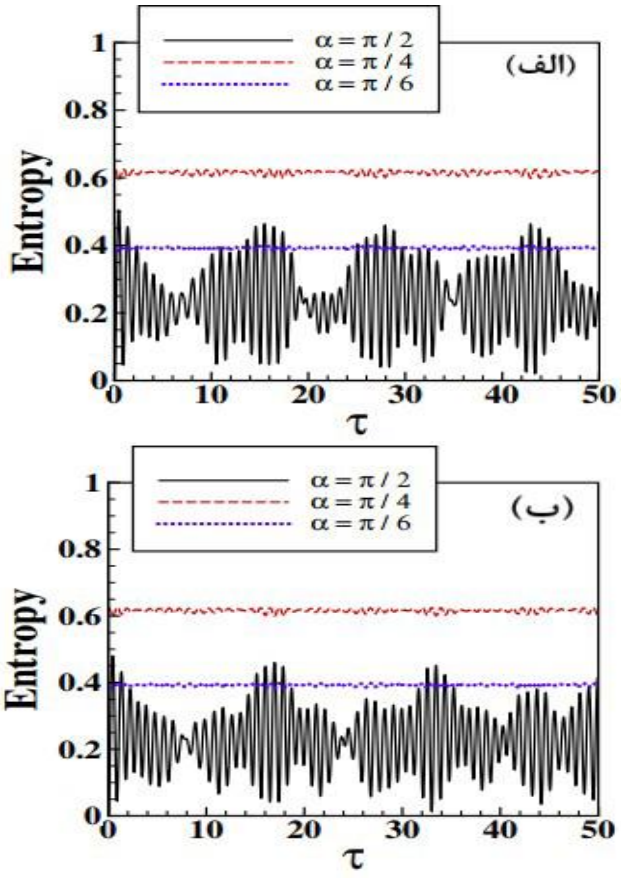
شکل ۱: آنتروپی خطی $S_{A_1A_2}(\tau)$ برای زوایای همدوسی α مختلف برحسب زمان مقیاس‌شده τ با $\nu_2/g_1 = 7$, $\nu_1/g_1 = 5$, $\Delta_{a'c'}/g_1 = 5, \Delta_{a'b'}/g_1 = 3.5, \Delta_{ac}/g_1 = 6, \Delta_{ab}/g_1 = 4,$ $g_2'/g_1 = 1.75, g_1'/g_1 = 2, g_2/g_1 = 1.5,$ ؛ الف) $\varepsilon_i = \lambda_i = 0$ ، ب) $\varepsilon_i = 0.1, \lambda_i = 0$ ؛ بطوریکه $i = 1,2,3,4$.

بدون تقریب موج چرخان، به ازای زوایای همدوسی $\alpha = \pi/2, \pi/4, \pi/6$ و پارامترهای موثر دیگر در درهم‌تنیدگی سامانه برای $S_{A_1,A_2}(\tau)$ ($S_{A_1}(\tau)$) رسم می‌کنیم. نتایج عددی نشان می‌دهد که در شکل ۱ در لحظه شروع واکنش ($\tau = 0$) درهم‌تنیدگی مورد نظر در حضور و غیاب تقریب موج چرخان وجود ندارد (همانگونه که انتظار می‌رود در زمان صفر با توجه به معادله (۶) سامانه جداپذیر است). همچنین در زمان‌های بالاتر تنها به ازای $\alpha = \pi/2$ می‌توان مرگ و سپس احیای درهم‌تنیدگی را مشاهده کرد، به طوری که برای $\alpha = \pi/4, \pi/6$ مرگ درهم‌تنیدگی اتفاق نمی‌افتد. علاوه بر این، پدیده‌های فروافت-احیاء را می‌توان به خوبی مشاهده کرد. پیداست که تعداد وقوع این فروافت-احیاءها در غیاب تقریب موج چرخان نسبت به حضور آن

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

کاهش یافته است. با بررسی شکل ۲ می‌توان دید که در $\tau=0$ به ازای $\alpha=\pi/2$، درهم‌تنیدگی در حضور و غیاب تقریب موج چرخان صفر است (در صورتی که برای دو مقدار دیگر این گونه نیست). همچنین، در زمان‌های بالاتر تنها به ازای $\alpha=\pi/2$ می‌توان مرگ و سپس احیای درهم‌تنیدگی را مشاهده کرد. از نتایج جالب دیگر، می‌توان به پدیده‌های فروافت-احیاء اشاره کرد، که تعداد آنها در غیاب تقریب موج چرخان نسبت به حضور آن کاهش یافته است (همراه با تغییراتی در نوسانات درهم‌تنیدگی). اما برای زوایای $\alpha=\pi/4,\pi/6$ مرگ درهم‌تنیدگی در هر دو زیرشکل اتفاق نمی‌افتد. علاوه بر این، برای این زوایا می‌توان حالت شبه‌پایداری از درهم‌تنیدگی را در هر دو حالت حضور و غیاب تقریب موج چرخان همراه با نوسانات بسیار جزئی مشاهده کرد. لازم به ذکر است که نسبت جفت‌شدگی اتم-میدان به بسامد اتم در ساختارهای جفت‌شدگی اتم-میدان ضعیف به صورت $\frac{g}{\omega}\ll 1$ است. علاوه بر این در ساختارهای جفت‌شدگی اتم-میدان عمیقا قوی و فوق قوی به ترتیب به صورت $\frac{g}{\omega}\gtrsim 1$ و $1<\frac{g}{\omega}\lesssim 0.1$ می‌باشد [۶]. با بررسی این نسبت در نمودارهای رسم‌شده می‌توان دید که شکل ۱ در محدوده جفت‌شدگی قوی و شکل ۲ در ناحیه اختلال جفت‌شدگی فوق قوی رسم شده است.

نتیجه‌گیری: در این مقاله با در نظر گرفتن برهم‌کنش دو کیوتریت با یک میدان کوانتیده دومد، ابتدا هامیلتونی موثر متناظر با این سامانه را در غیاب تقریب موج چرخان تعریف و سپس معادله شرودینگر وابسته به زمان متناظر را حل کردیم. در ادامه با محاسبه سنجه‌ی آنتروپی خطی مربوط به زیرسامانه‌های مختلف از سامانه مورد نظر، دینامیک درهم‌تنیدگی آنها را بررسی کردیم. نتایج عددی نشان داد که تعداد این پدیده‌ها در غیاب تقریب موج چرخان نسبت به حضور آن کاهش یافته است. همچنین تغییرات مربوط به نوسانات درهم‌تنیدگی در غیاب تقریب موج چرخان نسبت به حضور آن به خوبی قابل مشاهده است. علاوه بر این مرگ و سپس احیای درهم‌تنیدگی و پایداری نسبی درهم‌تنیدگی را



شکل ۲: آنتروپی خطی $S_{A_1}(\tau)$ برای زوایای همدوسی α مختلف برحسب زمان مقیاس‌شده τ با $\nu_2/g_1=2.25,\ \nu_1/g_1=1.75$ $\Delta_{a'c'}/g_1=4.3,\Delta_{a'b'}/g_1=3.7,\Delta_{ac}/g_1=3.5,\Delta_{ab}/g_1=4,$ $g_2'/g_1=0.65,g_1'/g_1=1.1,g_2/g_1=0.8,$؛ الف) $\varepsilon_i=0$، ب) $\lambda_i=0$، $\varepsilon_i=0.1$؛ بطوریکه $i=1,2,3,4$.

برای برخی از پارامترهای همدوسی اتمی شاهد هستیم. با توجه به نکات بالا می‌توان دریافت که با کنترل پارامترهای مختلف موثر در میزان درهم‌تنیدگی می‌توان به پایداری نسبی درهم‌تنیدگی و همچنین پدیده‌های فروافت و احیاء دست یافت. یکی دیگر از نتایج بسیار مهم این مقاله این است که در شرایط اولیه با میدان خلأ برای سامانه‌های متشکل از دو اتم می‌توان پدیده‌های فروافت و احیاء را مشاهده کرد.

مرجع‌ها

[1] C. Weedbrook, et al., *Mod. Phys.*, **84**, 621, 2012.
[2]F. W. Cummings,*Phys. Rev.*,**140**, A1051, 1965.
[3] M. Rastegarzadeh and M. K. Tavassoly, *Phys. Scr.*, **90**, 025103, 2015.
[4] N. Asili Firouzabadi and M. K. Tavassoly, *arXiv:2108.06372v1*, Accepted in Int. J. Opt. Photonics.
[5] R.M. Angelo, et al., *Phys. Rev. A*,**64**, 043801, 2001.
[6] P. Forn-Díaz, et al., *Rev. Mod. Phys.*,**91**, 025005, 2019.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]