بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران، دانشگاه شهید چمران اهواز، خوزستان، ایران.
۱۴-۱۲ بهمن ۱۴۰۰

شبیه‌سازی عددی لیزرهای چند مُدی با تشدیدگر پایدار به روش پرونی

سامان صدرآرا ، مهدی شایگان‌منش

دانشکده فیزیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

shaygan@iust.ac.ir, s_sadrara@physics.iust.ac.ir

چکیده-یکی از سریع ترین روش‌ها برای محاسبه مدها در تشدیدگرهای پایدار و ناپایدار که با رویکرد پدیده‌ی پراش به آن پرداخته می‌شود، روش **پرونی** یا Eigenvector method(EM) می‌باشد؛ در این مقاله با استفاده از زبان برنامه‌نویسی پایتون و کتابخانه‌های مربوطه به تحقق این روش پرداخته شد. در ابتدا برای صحت سنجی در این روش با حل انتگرال پراش برای روزنه‌های مربعی و دایروی با عدد فرنل‌های مختلف، نتایج دقیقی بدست آمد؛ پس از انجام محاسبات برای روزنه‌های پراش به محاسبات در حوزه‌ی تشدیدگر صفحه-موازی پرداخته شد و انتگرال پراش برای این تشدیدگر به روش پرونی و با المان‌بندی آینه‌ها برای رفت و برگشت باریکه حل شد و مدهای عرضی تشدیدگر بدست آمد. در انتها به تشدیدگر با آینه‌های کروی پرداخته شد و با حل معادله‌ی ویژه مقداری برای ماتریس انتقال تشدیدگر، مدهای پایه و مدهای مرتبه‌ی بالاتر محاسبه و رسم شد.

کلید واژه- تشدیدگر، تجزیه مدی، روش پرونی، روش ویژه‌بردار

Numerical Simulation of Multimode Lasers with Stable Resonators by Prony Method

Saman Sadrara, Mahdi Shayganmanesh

Physics department, Iran University of Science and Technology

shaygan@iust.ac.ir, s_sadrara@physics.iust.ac.ir

Abstract- One of the fastest methods for calculating modes in stable and unstable resonators, which is approached with the diffraction phenomenon, is the Prony method or Eigenvector method (EM); In this article, this method was realized using Python programming language and related libraries. First, for validation in this method, accurate results were obtained by solving the diffraction integral for square and circular apertures with different Fresnel numbers. After performing the calculations for the diffraction apertures, the calculations were conducted for plane-parallel resonator and the diffraction integral for this resonator was solved by Prony method and by discretization of the mirrors for the transition of the beam and the transverse modes were obtained. Finally, the resonator modes was calculated for spherical mirrors, and by solving an eigenvalue equation, values were obtained for the resonant transfer matrix, lowest order modes, and higher order modes, and their associated profiles were plotted for each case.

Keywords: Eigenvector Method, Modal decomposition, Prony Method, Resonator

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

مقدمه

تشدیدگرهای اپتیکی، یکی از مهم‌ترین قسمت‌های لیزر به حساب می‌آیند. برای اولین بار فاکس و لی از طریق محاسبات عددی به مطالعه روی تشدیدگرها پرداختند و نمونه‌های مختلفی را پیشنهاد و طراحی نمودند.[۱] تشدیدگرها ابزارهای اپتیکی هستند که باعث ایجاد حرکت رفت و برگشتی موج الکترومغناطیس می‌شوند و عموما از یک جفت آینه‌ی تخت یا خمیده تشکیل شده‌اند. معمولاً این آینه‌ها به طور دقیق هم‌تراز شده و مراکز آنها روی محور اپتیکی دستگاه لیزر قرار گرفته می‌شود. هندسه‌ی آینه‌ها و فاصله‌ی بین آنها، تعیین کننده‌ی میدان الکترومغناطیسی داخل کاواک لیزر می‌باشد[۲]. در این مقاله با استفاده از روش ویژه‌بردار(پرونی) به محاسبه‌ی این میدان‌های الکترومغناطیسی می‌پردازیم.

تئوری

این روش برای شبیه‌سازی مُدهای تشدیدگرهای باز و انتشار پرتو اولین بار مورد استفاده قرار گرفت و تمام مزیت‌های روش فاکس-لی را شامل می‌شود. در این روش تئوری پراش اسکالر به کار گرفته می‌شود اما احتیاجی به تقریب فرنل نیست. روش پرونی برای تشدیدگرهای با عدد فرنل بزرگ و کوچک و همچنین پایدار و ناپایدار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

روش انجام محاسبات

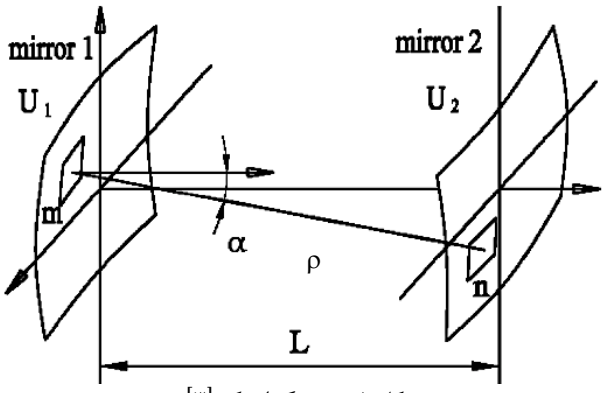
۱- مرحله‌ی اصلی محاسبه‌ی ماتریس انتقال A_1 تشدیدگر می‌باشد که تنها لازم است یک بار محاسبه شود و بعد از آن دیگر قابل تغییر نیست.

۲- ویژه مقادیر γ به راحتی از ماتریس A_1 استخراج می‌شوند و هر ویژه‌مقدار مستقیماً یک ویژه‌بردار U_1 را تولید می‌کند که معرف یک توزیع مد بر روی آینه اول تشدیدگر، بدون چند صد بار تکرار می‌باشد. اتلاف و شیفت فاز به آسانی با استفاده از γ محاسبه می‌شود. بنابراین بالا مرتبه‌ترین مدها، که در تشدیدگر نوسان می‌کنند را می‌توان در یک زمان محاسبه نمود. مدهایی که احتمال حضور آنها در تشدیدگر بیشتر است به آسانی می‌توانند با انتخاب γ با مقدار مطلق بزرگتر، انتخاب شوند، تا ویژه‌بردار مربوطه U_1 بدست آید. چگونگی توزیع مُدها و سهم هر مُد در تشدیدگر، مستقیما می‌تواند با مقایسه‌ی اتلاف آن‌ها ارزیابی شود.

با نادیده گرفتن مشخصات برداری میدان اپتیکی در خلأ، می‌توان آن را به طور تقریبی با معادله‌ی انتگرال پراش فرنل-کیرشهف توصیف نمود:[۳]

$$U_2 = \frac{iK}{4\pi}\iint_{s_1} U_1 \frac{e^{-iK\rho}}{\rho}(1+\cos(\alpha))ds \qquad (۱)$$

این معادله همانطور که پیشتر اشاره شد، اگر توزیع میدان اپتیکی در سطح مشخص s_1 در فضا، در دسترس باشد، توزیع میدان اپتیکی ناشی از سطح s_1 در هر سطح دیگری در فضا قابل محاسبه می‌باشد. میدان اپتیکی U_2 بر روی آینه‌ی ۲ توسط میدان اپتیکی U_1 بر روی آینه ۱ با استفاده از معادله‌ی بالا، تولید می‌شود و بالعکس.



شکل ۱: تشدیدگر اپتیکی[۳]

میدان اپتیکی بر روی آینه‌ی ۱، $U_1(x,y)$، می‌تواند به g اِلمان تقسیم شود و این تابع پیوسته با جداسازی می‌تواند به صورت یک ماتریس ستونی زیر نوشته شود:

$$U_1 = \left[u_1[1], u_1[2], \dots, u_1[g]\right]^T \qquad (۲)$$

پس از طی مسیر از آینه‌ی ۱ به آینه‌ی ۲، U_1، میدان اپتیکی بر روی آینه‌ی ۲ یعنی U_2 را تولید خواهد کرد.

به همین روش و همانند قبل U_2 نیز می‌تواند به h اِلمان تقسیم شود و به صورت یک ماتریس ستونی نوشته شود:

$$U_2 = \left[u_2[1], u_2[2], \dots, u_2[h]\right]^T \qquad (۳)$$

بر اساس انتگرال فرنل-کیرشهف و شکل ۱، $U_{12}[n,m]$، میدان اپتیکی بر روی n اُمین اِلمان با مرکز $[X_m, Y_m]$ از آینه ۲ می‌باشد که تأثیریافته از mاُمین اِلمان با مرکز $[X_n, Y_n]$ بر روی آینه‌ی ۱ است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_{12}[n,m] = \frac{iK}{4\pi}\iint_{S_m} E_1[m]\frac{\exp(-iK\rho)}{\rho}(1 + \cos\alpha)\,dx\,dy \qquad (۴)$$

در اینجا همانطور که در شکل ۱ مشخص است، ρ فاصله‌ی بین m اُمین المان از مبدأ بر روی آینه‌ی ۱ و n اُمین المان

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

از مقصد بر روی آینه‌ی ۲ می‌باشد؛ α زاویه‌ی بین بردار نرمال در نقطه‌ی مبدأ بر روی آینه‌ی ۱ و خط متصل بین نقطه‌ی مبدأ از آینه‌ی ۱ و نقطه‌ی مقصد از آینه‌ی ۲ می‌باشد؛ L طول تشدیدگر؛ S_m مساحت المان m اُم از آینه‌ی ۱ می‌باشد و $E_1[m]$ تابع میدان بر روی المان m اُم است.

به طور کلی میدان بر روی هر المان یکسان نیست، لذا $E_1[m]$ با تابع زیر معرفی می‌شود:[۴]

$$E_1[m] = U_1[m]\big(Shape(x,y)\big) \qquad (۵)$$

$U_1[m]$ میدان در نقطه‌ی مرکزی m اُمین المان می‌باشد و تابع $Shape$ تنها با موقعیت هندسی بیان می‌شود. حال با استفاده از روابط بالا می‌توان به صورت زیر میدان اپتیکی را بازنویسی کرد:

$$U_{12}[n,m] = U_1[m]\frac{iK}{4\pi}\iint_{S_m} Shape(x,y) \times \frac{\exp(-iK\rho)}{\rho}(1+\cos\alpha)\,dx\,dy \qquad (۶)$$

حالت خلاصه‌ی این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_{12}[n,m] = A_{12}[n,m]U_1[m] \quad m,n = 1,2,\cdots,h \qquad (۷)$$

که در اینجا همانطور که از معادله‌ی بالا پیداست $A_{12}[n,m]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A_{12}[n,m] = \frac{iK}{4\pi}\iint_{S_m} Shape(x,y) \times \frac{\exp(-iK\rho)}{\rho}(1+\cos\alpha)\,dx\,dy \qquad (۸)$$

هنگامی که نوع تشدیدگر و و طریقه‌ی چیدمان المان‌ها (مِش بندی) مشخص شد، $A_{12}[n,m]$ می‌تواند محاسبه شود. از آنجایی که مقادیر انتگرال یعنی ρ و $\cos(\alpha)$ ، تنها به موقعیت هندسی mاُمین و nاُمین المان مربوط می‌شود، با یک زوج m و n تنها می‌توان یک $A_{12}[n,m]$ را محاسبه نمود.

$u_2[n]$ که در اینجا nاُمین عنصر از U_2 می‌باشد، حاصل از تمامی المان‌ها آینه‌ی ۱ است:

$$u_2[n] = \sum_{m=1}^{g} U_{12}[n,m] = \sum_{m=1}^{g} A_{12}[n,m]U_1[m]$$
$$m = 1,2,\cdots,g \qquad n = 1,2,\cdots,h \qquad (۹)$$

اکنون می‌توان معادله‌ی (۹) را به فرم ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} u_2[1] \\ u_2[2] \\ \vdots \\ u_2[h] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}[1,1] & A_{12}[1,2] & \cdots & A_{12}[1,g] \\ A_{12}[2,1] & A_{12}[2,2] & \cdots & A_{12}[2,g] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{12}[h,1] & A_{12}[h,2] & \cdots & A_{12}[h,g] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[1] \\ u_1[2] \\ \vdots \\ u_1[g] \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow U_2 = A_{12}U_1 \qquad (۱۰)$$

ماتریس انتقال از آینه‌ی ۱ به آینه‌ی ۲، A_{12} می‌باشد.

به همین طریق که بیان شد می‌توان ماتریس انتقال از آینه‌ی ۲ به آینه‌ی ۱ (A_{21}) را که به معنای اثر میدان اپتیکی آینه‌ی ۲ بر روی آینه‌ی ۱ می‌باشد، نیز محاسبه نمود؛ بنابراین پس از یک رفت و برگشت میدان بر روی آینه‌ی ۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_1' = A_{21}U_2 = A_{21}A_{12}U_1 = A_1U_1 \qquad (۱۱)$$

در اینجا $A_1 = A_{21}A_{12}$ ، با ابعاد $g \times g$ ، ماتریس ماتریس انتقال رفت و برگشت تشدیدگر است که تنها با مشخصات هندسی آن قابل محاسبه می‌باشد.

بر اساس تئوری خود بازسازی تشدیدگرهای اپتیکی، ویژه‌بردارهای میدان در معادله‌ی ویژه‌مقداری زیر صدق می‌کنند:

$$U_1' = \gamma U_1 \qquad (۱۲)$$

در اینجا γ ویژه مقدار معادله، اتلاف دامنه و افت و خیز فاز را نشان می‌دهد.

با معادله‌های بالا به نتیجه‌ی مهم زیر دست پیدا خواهیم کرد:

$$\gamma U_1 = A_1U_1 \qquad (۱۳)$$

هر تک مقدار γ ، یک ویژه بردار به عنوان یک ماتریس ستونی را نشان می‌دهد که بیانگر توزیع یک مد پایدار بر روی آینه‌ی تشدیدگر می‌باشد؛ از آنجایی که γ یک عدد موهومی است، مقدار مطلق آن، اتلاف دامنه و زاویه‌ی فاز آن، تغییر فاز در هر رفت و برگشت این مد را نشان می‌دهد. بنابراین با این روش برای حل توزیع مدهای یک تشدیدگر به جای راه حل‌های پیچیده و روش‌های محاسبه‌ای که نیاز به کد نویسی سنگین و زمان بر دارند، یک معادله‌ی ویژه مقداری را محاسبه می‌کند؛ لذا ماتریس انتقال A_1 شامل اطلاعات مهم برای توصیف یک تشدیدگر است.

سهم مُدها

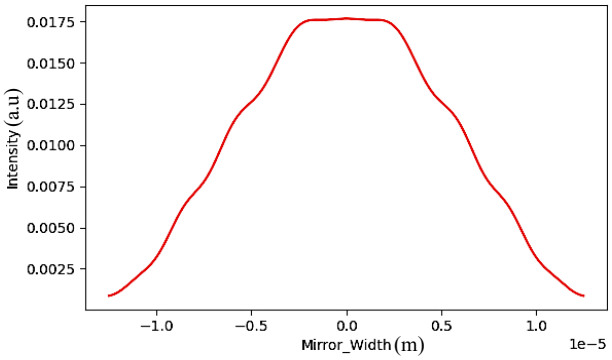
محاسبات را برای تشدیدگر صفحه-موازی و تشدیدگر با آینه‌های استوانه‌ای انجام می‌دهیم. باید در نظر داشت که در روش ویژه‌برداری به دلیل اینکه محاسبات یک بار انجام می‌شود و بر خلاف روش‌های دیگر میدان خود را در دل

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

ماتریس انتقال تشدیدگر دوباره تولید می‌کند و نیاز به لحاظ کردن میدان قبل در رفت و برگشت بعدی نیست.

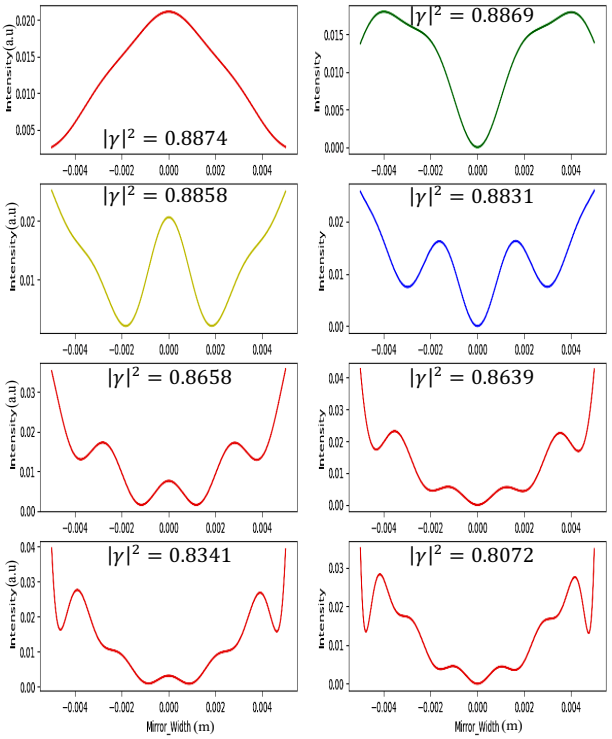
تشدیدگر صفحه-موازی

مُدها را برای این تشدیدگر با عدد فرنل ۷ محاسبه نمودیم. برای این نوع تشدیدگر با وجود در دست داشتن تمامی ویژه‌مقادیر و توانایی رسم همه‌ی مدهای نوسان‌کننده برای اختصار به ارائه مُد پایه بسنده کردیم.



شکل ۲: پروفایل شدت میدان برای مد TEM_{00} در تشدیدگر صفحه-موازی پس از تعداد زیادی رفت و برگشت با $N \cong 7$

تشدیدگر با آینه‌های استوانه‌ای



شکل ۳: پروفایل شدت همزمان ۸ مُد نوسان‌کننده با بیشترین سهم نوسان در تشدیدگر با آینه‌های استوانه‌ای با $g_1 = g_2 \cong 0.9$ و $N \cong 1$

برای مُد پایه در تشدیدگر صفحه-موازی همانطور که در شکل ۳ پیداست توزیع شدت میدان در لبه‌ی آینه برای عدد فرنل‌های بزرگ، کوچکتر است؛ اگرچه که این توزیع شدت در عدد فرنل‌هایی که به اندازه‌ی کافی بزرگ هستند(به عنوان مثال بزرگتر از ۵۰) تقریبا یکسان می‌باشد. این در حالی است که موج‌های با طول موج بلند دچار پراشیدگی بیشتری می‌شوند.

در شکل ۳ مدهای ۸گانه برای تشدیدگر با آینه‌های کروی رسم شده است. قابل مشاهده است که با افزایش شماره‌ی مد و حرکت به سمت مدهای بالاتر با کاهش اندازه‌ی ویژه مقادیر، تعداد قله‌ها و دره‌ها بیشتر می‌شوند و سایز لکه نیز بزرگتر می‌شود. اتلاف در مدهای بالاتر بیشتر بوده و شرایط سایز لکه و افت و خیزهای متعدد در توزیع شدت هر مد متفاوت با مدهای مرتبه‌ی پایین‌تر می‌شود.

پارامتر g_1 و g_2 برای این تشدیدگر برابر ۰/۹ در نظر گرفته شده است با کاهش این عدد دامنه در لبه‌ها کاهش پیدا می‌کند و برابر و یا کمتر از مقدار آن در میانه‌ی نمودار می‌شود و شکل تیز تری تولید خواهد کرد.

نتیجه‌گیری

روش پرونی برای حل عددی تشدیدگرها چه در حالت پایدار و چه ناپایدار می‌تواند تعداد زیادی از مدها را محاسبه کند، بنابراین بسته به شرایط تشدیدگر مانند سایز آینه‌ها، طول تشدیدگر، عدد فرنل و ... می‌توان همه‌ی مُدهای عرضی نوسانی یک تشدیدگر را به صورت همزمان محاسبه و بدست آورد و کدنویسی را به روش بهینه انجام داد.

مرجع‌ها

[1] A. G. Fox and T. Li, “Resonant Modes in a Maser Interferometer,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 40, no. 2, pp. 453–488, 1961.

[2] J. T. Verdeyen, *Laser Electronics THIRD EDITION*. 1995.

[3] J. Chao, B. Li, Y. Cheng, and Y. Wang, “Simulation of optical field in laser resonators cavity by eigenvector method,” vol. 39, pp. 490–499, 2007.

[4] D. Wang, Y. Qin, X. Tang, and L. Xiao, “Eigenvector method for unstable resonator simulations,” *Opt. Commun.*, vol. 285, no. 10–11, pp. 2682–2687, 2012.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]