بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
خوزستان، ایران.
۱۲-۱۴ بهمن ۱۴۰۰

# درهم‌تنیدگی مگنون با فوتون و کیوبیت ابرسانا در یک کاواک اپتیکی در حضور محیط کِر

**میثم ستوده خیرآبادی؛ محمدکاظم توسلی**

**گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد**

meysam.setodeh@stu.yazd.ac.ir, mktavassoly@yazd.ac.ir

**چکیده: در این مقاله تولید درهم‌تنیدگی مگنون-فوتون و مگنون-کیوبیت ابررسانا در یک کاواک اپتیکی و در حضور محیط کِر بررسی شده است. با معرفی هامیلتونی و حالت اولیه سامانه، کِت حالت وابسته به زمان و هم‌چنین کِت حالت پایای سامانه بدست آمده است. محاسبه سنجه تلاقی به ازای پارامترهای مختلف نشان می‌دهد که جفت‌شدگی قوی‌تر بین میدان و کیوبیت ابررسانا لزوماً به حالتی با میزان درهم‌تنیدگی بالاتر منجر نمی‌شود و هم‌چنین مرگ لحظه‌ای و احیای درهم‌تنیدگی مشاهده می‌شود. بیشینه درهم‌تنیدگی حالت پایا با جفت‌شدگی‌های میدان-مگنون و میدان-کیوبیت برابر قابل دسترس است.**

کلید واژه: اثر کِر اپتیکی، درهم‌تنیدگی حالت پایا، مگنون.

# Entanglement of magnon with photon and superconducting qubit in an optical cavity in the presence of Kerr medium

**Meysam Setodeh Kheirabady and Mohammad Kazem Tavassoly**

**Laser and Optics Group, Faculty of Physics, Yazd University**

meysam.setodeh@stu.yazd.ac.ir, mktavassoly@yazd.ac.ir

**Abstract: In this paper, the generation of magnon-photon and magnon-superconducting qubit entanglement in an optical cavity and in the presence of Kerr medium have been investigated. By introducing the Hamiltonian and initial state of the system, time-dependent state ket, and also the steady-state ket of the system are achieved. Evaluating concurrence with different parameters shows that stronger coupling between the field and the superconducting qubit necessarily does not lead to a state with a higher amount of entanglement and also, sudden death and revival of the entanglement have been observed. With equal field-magnon and field-qubit couplings, the maximally entangled steady state is accessible.**

**Keywords:** Magnon, Optical Kerr effect, Steady state entanglement.

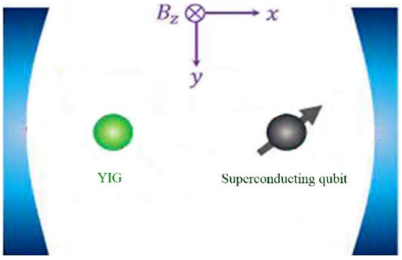
[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06 ]

## مقدمه

امروزه درهم‌تنیدگی‌های چندجزئی ماکروسکوپی به دلیل ویژگی‌های منحصر به فردی که دارند، بخش مهمی از آزمایش‌های اطلاعات کوانتومی و رمزنگاری کوانتومی هستند [۱]. ایجاد سامانه‌های مقاوم در برابر اتلاف و اثرات محیطی همواره بخش مهمی از مطالعات تجربی و نظری بوده است. در این رابطه استفاده از سامانه‌های ماکروسکوپی یکی از گزینه‌های مناسب برای غلبه بر اتلاف است [۲]. به عنوان مثال ماده فرومغناطیسِ ساخته شده از ایتریوم، آهن و گارنت (ترکیبی از سیلیکات‌ها)، که مگنون خوانده می‌شود به واسطه رفتار مشابه اسپینِ آن‌ها امروزه بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند [۳]. از ویژگی‌های منحصر به فرد مگنون‌ها می‌توان به نیمه‌عمر و قابلیت تنظیم‌پذیری بالای آن‌ها اشاره کرد [۴] که هر دو ویژگی مورد نیاز فیزیک تجربی می‌باشد. علاوه بر این، مگنون‌ها می‌توانند به صورت همدوس، اطلاعات کوانتومی را با دیگر کاندیداهای بیت‌های کوانتومی مانند فوتون‌ها و یا کیوبیت‌های ابررسانا تبادل کنند [۵]. هم‌چنین، مگنون‌ها می‌توانند اثرات غیرخطی محیط کِر را نیز القا کنند [۶]. در این مقاله درهم‌تنیدگی بین یک مگنون با میدان کوانتیده تک‌مُد و یک کیوبیت ابررسانا را با در نظر گرفتن محیط کِر بررسی کرده‌ایم.

## مدل سامانه و اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی

سامانه مورد مطالعه از یک کاواک اپتیکی تک‌مُد با بسامد $\omega_c$ تشکیل شده است که این کاواک اپتیکی شامل یک مگنون و یک کیوبیت ابررسانا می‌باشد. مدل درنظر گرفته شده در شکل ۱ نمایش داده شده است. هامیلتونی مگنون در حضور یک میدان مغناطیسی به صورت $\hat{H}_m = g\,\mu_B B_z \hat{S}_z$ نوشته می‌شود. $g$ ثابت ژیرومغناطیس، $\mu_B$ مگنتون بوهر، $\hat{S}_z$ و $B_z$ به ترتیب مولفه $z$ اسپینِ مگنون و میدان مغناطیسی هستند. با استفاده از تبدیل هولشتاین-پریماکوف [۷] می‌توان $\hat{H}_m$ را با عملگرهای بوزونی $\hat{m}$ و $\hat{m}^\dagger$ به صورت $\omega_m \hat{m}^\dagger \hat{m}$ نوشت که $\omega_m$ بسامد مگنون است.




شکل ۱: کاواک اپتیکی تک‌مُد شامل یک مگنون و یک کیوبیت ابررسانا.

هامیلتونی یک مگنون در برهم‌کنش با میدان کوانتیده تک‌مُد و با ضریب جفت‌شدگی $g_m$ در تقریب موج چرخان به‌صورت زیر معرفی می‌شود ($\hbar = 1$) [۷]:

$$\hat{H}_{am} = g_m \left(\hat{m}^\dagger \hat{a} + \hat{m}\hat{a}^\dagger\right). \qquad (۱)$$

در مورد برهم‌کنش کیوبیت ابررسانا (با بسامد $\omega_q$) با میدان کوانتیده تک‌مُد و با ضریب جفت‌شدگی $g_q$ نیز رابطه‌ای مشابه رابطه (۱) داریم که به صورت زیر است [۸]:

$$\hat{H}_{aq} = g_q \left(\hat{q}^\dagger \hat{a} + \hat{q}\hat{a}^\dagger\right). \qquad (۲)$$

قابلیت تنظیم‌پذیری و جفت‌شدگی قابل ملاحضه با میدان‌های کوانتیده از ویژگی‌های مهم مگنون‌ها و کیوبیت‌های ابررسانا می‌باشد که استفاده از آن‌ها را تسهیل کرده است. در نهایت، با در نظر گرفتن اثر محیط کِر با ضریب $\chi$، هامیلتونی کل سامانه در تقریب موج چرخان به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\hat{H}_{total} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{m}^\dagger \hat{m} + \omega_q \hat{q}^\dagger \hat{q} + \chi \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{a} + \hat{H}_{am} + \hat{H}_{aq}. \qquad (۳)$$

در مدل در نظر گرفته شده، جفت‌شدگی مستقیم بین مگنون و کیوبیت ابررسانا در نظر گرفته نشده که از نظر تجربی کاملا امکان پذیر است [۹]. حال پایستگی عدد برانگیختگی کل را بررسی می‌کنیم. عملگر تعداد کل سامانه به صورت $\hat{N} = \sum_{\hat{o}=\hat{a},\hat{m},\hat{q}} \hat{o}^\dagger \hat{o}$ می‌باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که جابجایی $\hat{N}$ و $\hat{H}_{total}$ صفر می‌شود و این به این معنی است که عدد برانگیختگی کل پایسته است و این ما را قادر می‌سازد تا از پایه‌هایی استفاده کنیم که این پایستگی را دارند. مجموعه پایه‌های انتخابی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06 ]

$$\{|cavity, magnon, qubit\rangle\} \equiv \{|n+1,0,0\rangle,\ |n,1,0\rangle,\ |n,0,1\rangle\}. \quad (۴)$$

با یک تبدیل یکانی به صورت $\hat{R}(t)=e^{i\hat{H}_0 t}$ (که $\hat{H}_0$ هامیلتونی آزاد سامانه است) و با در نظر گرفتن شرایط تشدید بین مگنون، میدان و کیوبیت ابررسانا ($\omega_c=\omega_q=\omega_m$)، هامیلتونی سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{H}_1=\chi\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}+\hat{H}_{am}+\hat{H}_{aq}. \quad (۵)$$

با استفاده از پایه‌های معرفی شده در رابطه (۴) و حذف عناصر قطری یکسان (که نهایتا یک فاز کلی ایجاد می‌کنند [۱۰]) به هامیلتونی زیر می‌رسیم:

$$\hat{H}_2=\begin{pmatrix}\chi & g_m\sqrt{n+1} & g_q\sqrt{n+1}\\ g_m\sqrt{n+1} & -\chi & 0\\ g_q\sqrt{n+1} & 0 & -\chi\end{pmatrix}. \quad (۶)$$

با توجه به هامیلتونی اخیر، ماتریس تحول زمانی سامانه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{U}(t)=e^{-i\hat{H}_2 t}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix},$$
$$c_{11}=\cos\Omega\tau-\frac{i\beta\sin\Omega\tau}{\Omega},$$
$$c_{12}=c_{21}=\frac{1}{\alpha}c_{13}=\frac{1}{\alpha}c_{31}=-\frac{i\sqrt{n+1}\sin\Omega\tau}{\Omega},$$
$$c_{22}=\frac{e^{i\beta\tau}\alpha^2+\cos\Omega\tau+\frac{i\beta\sin\Omega\tau}{\Omega}}{1+\alpha^2},$$
$$c_{23}=c_{32}=\frac{\alpha(-\cos\beta\tau+\cos\Omega\tau-i(\sin\beta\tau-\frac{\beta\sin\Omega\tau}{\Omega}))}{1+\alpha^2},$$
$$c_{33}=\frac{e^{i\beta\tau}+\alpha^2(\cos\Omega\tau+\frac{i\beta\sin\Omega\tau}{\Omega})}{1+\alpha^2},$$
$$\Omega=\sqrt{(n+1)(1+\alpha^2)+\beta^2},\ \beta=\frac{\chi}{g_m},\ \alpha=\frac{g_q}{g_m},\ \tau=g_m t. \quad (۷)$$

که $\tau$ زمان مقیاس شده می‌باشد. با استفاده از نمایش ماتریسی پایه‌های معرفی شده در (۴)، حالت اولیه بهنجار سامانه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\psi(0)\rangle=(a\ \ b\ \ c)^T,\quad \sum_{\ell=a,b,c}|\ell|^2=1. \quad (۸)$$

بنابراین کتِ حالت وابسته به زمان سامانه با کُنش ماتریس تحولِ زمانی روی حالت اولیه (۸) بدست می‌آید:

$$|\psi(t)\rangle=(C_1\ \ C_2\ \ C_3)^T,$$
$$C_i=a c_{i1}+b c_{i2}+c c_{i3},\quad i=1,2,3. \quad (۹)$$

با استفاده از $|\psi(t)\rangle$ ماتریس چگالی سامانه را می‌نویسیم:

$$\hat{\rho}=|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (۱۰)$$

با ردگیری مناسب می‌توان ماتریس چگالی کاهش‌یافته برای مگنون-فوتون ($\hat{\rho}_{fm}$) و مگنون-کیوبیت ($\hat{\rho}_{mq}$) را به صورت زیر بدست آورد:

$$\hat{\rho}_{fm}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&|C_1|^2&C_1C_2^*&0\\0&C_2C_1^*&|C_2|^2&0\\0&0&0&|C_3|^2\end{pmatrix},$$
$$\hat{\rho}_{mq}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&|C_2|^2&C_2C_3^*&0\\0&C_3C_2^*&|C_3|^2&0\\0&0&0&|C_1|^2\end{pmatrix}. \quad (۱۱)$$

حال می‌خواهیم میزان درهم‌تنیدگی‌های ممکن در سامانه را بررسی کنیم. برای این کار از سنجه تلاقی استفاده می‌کنیم. سنجه تلاقی با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$C(t)=Max\left(0,\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_3}-\sqrt{\lambda_4}\right), \quad (۱۲)$$

که در این رابطه $\lambda_i\,(i=1,\cdots,4)$ ویژه‌مقادیر ماتریس زیر هستند، که به‌ترتیب کاهشی نوشته شده‌اند:

$$\hat{\rho}\left(\hat{\sigma}_y\otimes\hat{\sigma}_y\right)\hat{\rho}^*\left(\hat{\sigma}_y\otimes\hat{\sigma}_y\right), \quad (۱۳)$$

که $\hat{\sigma}_y$ ماتریس پائولی می‌باشد.

درهم‌تنیدگی دیگر در رابطه با سامانه در نظر گرفته شده، درهم‌تنیدگی حالت پایا می‌باشد که در ادامه به محاسبه آن می‌پردازیم. برای این منظور هامیلتونی معرفی شده در رابطه (۶) و $\chi=0$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله شرودینگر وابسته به زمان، حالت پایای سامانه به صورت زیر بدست می‌آید:

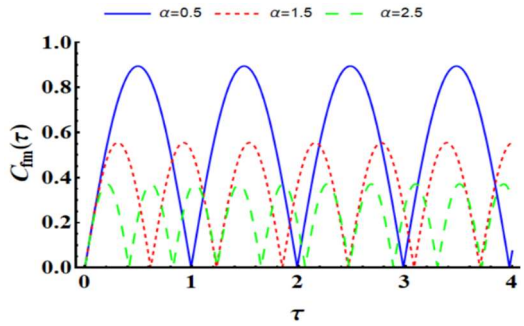
$$|\psi_s\rangle=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}|n,1,0\rangle-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}|n,0,1\rangle. \quad (۱۴)$$

با بررسی رابطه (۱۴) درمی‌یابیم که در حالت پایا، تنها بین مگنون و کیوبیت ابررسانا درهم‌تنیدگی وجود دارد و حالت میدان جداپذیر است. میزان درهم‌تنیدگی حالت پایا بین

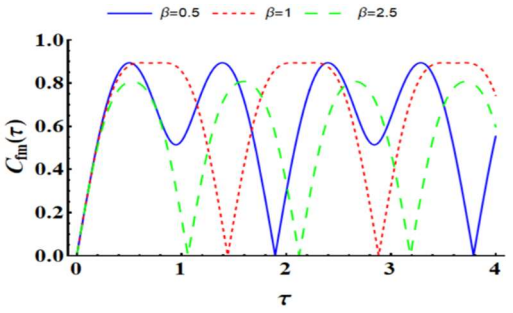


[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06 ]

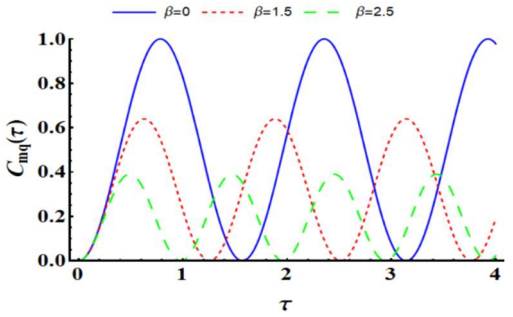
مگنون و کیوبیت نیز با سنجه تلاقی تعیین می‌شود. در ادامه نمودارهای تلاقی برای درهم‌تنیدگی‌های مگنون-فوتون و مگنون-کیوبیت به ازای $a=n=1,\ b=c=0$ و بر حسب زمان مقیاس‌شده $\tau=g_m t$ و همچنین برای حالت پایا برحسب $\alpha$ رسم شده است.



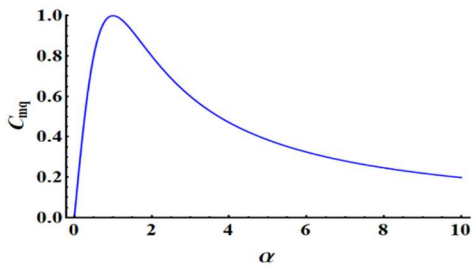

شکل ۲: درهم‌تنیدگی مگنون-فوتون به ازای $\beta=0$.




شکل ۳: درهم‌تنیدگی مگنون-فوتون به ازای $\alpha=0.5$.




شکل ۴: درهم‌تنیدگی مگنون-کیوبیت به ازای $\alpha=1$.




شکل ۵: درهم‌تنیدگی حالت پایای مگنون-کیوبیت برحسب $\alpha$.

## بحث و نتیجه‌گیری

در این بخش به تجزیه و تحلیل نتایج عددی می‌پردازیم. شکل ۲ میزان درهم‌تنیدگی بین مگنون و فوتون را به ازای سه مقدار متفاوت $\alpha$ (جفت‌شدگی نسبی مگنون-کیوبیت) نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که افزایش $\alpha$، باعث کاهش درهم‌تنیدگی و همچنین تغییر دوره تناوب مرگ و احیای آن می‌شود. برای بررسی اثر محیط کِر، شکل ۳ به ازای $\alpha=0.5$ و سه مقدار متفاوت $\beta$ (نسبت ضریب محیط کِر به جفت‌شدگی مگنون-فوتون) رسم شده است. به‌ازای $\beta=1$ و در بازه‌هایی از زمان می‌توان به درهم‌تنیدگی پایدار رسید. شکل ۴ برای بررسی اثر محیط کِر بر درهم‌تنیدگی $C_{mq}(\tau)$ رسم شده است. با کاهش $\beta$، میزان درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد و همچنین نوسانات کندتر می‌شوند. شکل ۵ درهم‌تنیدگی حالت پایا برحسب $\alpha$ را نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که در این حالت بیشینه درهم‌تنیدگی $C_{mq}$ به ازای $\alpha\simeq 1$ قابل دسترس می‌باشد. همچنین در شکل ۴ (به ازای $\beta=0$) این حقیقت نشان داده شده است که بیشینه درهمتنیدگی $C_{mq}(\tau)$ در زمان‌های خاصی به ازای $\alpha=1$ ($g_m=g_q$) رخ می‌دهد. علاوه بر این نتیجه می‌گیریم که مرگ و احیای درهم‌تنیدگی در همه موارد $C_{mq}(\tau)$ و $C_{fm}(\tau)$ قابل مشاهده است. محیط کِر اثر مثبتی بر میزان درهم‌تنیدگی $C_{fm}(\tau)$ و $C_{mq}(\tau)$ ندارد (بَرخلاف مرجع [۱۱]) و همچنین جفت‌شدگی $g_q$ قوی‌تر لزوماً حالتی با میزان درهم‌تنیدگی بالاتر را نتیجه نمی‌دهد.

## مرجع‌ها

[1] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press, 2th ed. 2000).
[2] B. Julsgaard, A. Kozhekin, E. S. Polzik, Nature, Vol. 413, pp. 400, 2001.
[3] Y. Tabuchi, S. Ishino, T. Ishikawa, R. Yamazaki, K. Usami, Y. Nakamura, Phys. Rev. Lett., Vol. 113, pp. 083603, 2014.
[4] X. Zhang, C. L. Zou, L. Jiang, H. X. Tang, Sci. Adv. Vol. 2, pp. e1501286, 2016.
[5] O. O. Soykal, M. E. Flatté, Phys. Rev. Lett., Vol. 104, pp. 077202, 2010.
[6] Y. P. Wang, G. Q. Zhang, D. Zhang, T. F. Li, C. M. Hu, J. Q. You, Phys. Rev. Lett., Vol. 120, pp. 057202, 2018.
[7] T. Holstein, H. Primakoff, Phys. Rev., Vol. 58, pp. 1098, 1940.
[8] Z. L. Xiang, S. Ashhab, J. Q. You, F. Nori, Rev. Mod. Phys., Vol. 85, pp. 623, 2013.
[9] Y. Tabuchi, S. Ishino, A. Noguchi, T. Ishikawa, R. Yamazaki, K. Usami, Y. Nakamura, Science, Vol. 349, pp. 405, 2015.
[10] D. W. Luo, X. F. Qian, T. Yu, Opt. Lett., Vol. 46, pp. 1073, 2021.
[11] Z. Dan, Z. Xiao-Ping, Z. Qiang, Chinese Phys. B, Vol. 22, pp. 064206, 2013.

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06 ]