بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

ایجاد درهم‌تنیدگی دور برد بین دو ذره با اسپین ۱/۲ در میدان های مغناطیسی خارجی

مهدی امنیت طلب ، حسین رنگانی جهرمی و امیر پرنیان
گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، صندوق پستی ۱۶۵، ارومیه

چکیده- در این مقاله تغییرات درهم‌تنیدگی یک سیستم دو کیوبیتی بر حسب فاصله بین کیوبیت ها، هنگامی که کیوبیت ها تحت تاثیر میدان مغناطیسی مختلف می‌باشند، در مدل XX هایزنبرگ همراه با اندرکنش دژایلوشنسکی- موریا (DM) مورد مطالعه قرار می گیرد. نشان داده خواهد شد که وقتی جفت شدگی تبادلی همسانگرد (J) را در دو مدل کالگرو – موزر بررسی کنیم، درهم‌تنیدگی برای سیستم مذکور می تواند با افزایش فاصله بین کیوبیت ها افزایش یافته و به یک نقطه ی بیشینه برسد و پس از یک افت کوتاه برای فواصل طولانی بدون تغییر بماند. لذا ایجاد درهم‌تنیدگی بین کیوبیت هایی که در فواصل دور از یکدیگر قرار دارند، مستقل از اندرکنش بین آنها، که دارای اهمیت فراوانی است، میسر میشود.

Creation of long-distance entanglement between two entangled spin ½ particles in external magnetic fields

Mahdi Amniat - Talab, Hossein Rangani Jahromi and Amir Parnian

Department of Physics, Faculty of sciences, Urmia University, P. B. 165, Urmia, Iran

Abstract-We study the variation of entanglement with distance for a two spin-1/2 system with Dzyaloshinskii-Moriya (DM) interaction, while one of the spins is driven by a time-varing rotating magnetic field and the other one is coupled with a static magnetic field. We show that when we consider the spin-spin coupling coefficient in the form of the Calogero-Moser types, the entanglement can increase with the distance and reach a peak; then it decreases for a short distance and will be unchanged for very long distances. So, it is possible to create a significant amount of entanglement between distant qubits, simultaneously avoiding direct interactions between them and single-subsystem addressing.

۱-مقدمه

درهم‌تنیدگی یک خصیصه بنیادی مکانیک کوانتومی است. حالت های درهم‌تنیده بیانگر نوعی همبستگی غیرموضعی بین زیر سیستم ها بوده و شالوده بسیاری از کاربردهای علوم اطلاعات کوانتومی شامل ارتباط از راه دور کوانتومی[۱]، کدنویسی متراکم کوانتومی[۲]، رمزنگاری کوانتومی[۳] و محاسبات کوانتومی[۴] را فراهم می کنند. در بیشتر سیستم‌ها با برهمکنش های کوتاه برد، درهم - تنیدگی بین جفت ذره ها سریعا با افزایش فاصله کاهش می یابد. برای مثال در مورد مدل آیزینگ[۵] با میدان عرضی[۱]، تلاقی دو اسپین در فواصل بزرگتر از دو سایت مجاور به صفر نزول میکند در صورتی که در مدل هایزنبرگ [۲] فقط به نزدیکترین همسایه های منفرد محدود می شود. یک استثناء در این رفتار به وسیله آمیکو[۶] [۳] پیدا شده است که نشان داد نزدیک نقاط فاکتورگیری، به طور نامحدود، محدوده درهم‌تنیدگی افزایش می یابد. به هر حال در این مورد نیز، درهم‌تنیدگی دارای دوام زیادی نیست و با افزایش محدوده سریعا به صفر کاهش می یابد. به طور کلی یک هدف خیلی مهم ایجاد درهم‌تنیدگی قابل توجه بین زیرسیستم هایی است که در فواصل دور از یکدیگر قرار دارند. در این مقاله بعد از بدست آوردن ویژه مقادیر و ویژه بردارهای هامیلتونی سیستم، تلاقی حالت های بی درروی سیستم که معیاری از اندازه‌گیری درهم تنیدگی می‌باشد را بدست آورده و رفتار آنها را با فاصله تحت دو نوع مدل کالگرو- موزر، جهت بدست آوردن کیوبیت هایی که در فواصل دور در حالات درهم‌تنیده هستند، بررسی خواهیم کرد.

۲-مدل و معادلات اساسی

سیستمی با دو اسپین $1/2$ (دو کیو بیتی)، که یکی از اسپین‌ها تحت تاثیر میدان مغناطیسی چرخان در صفحه $x-y$ و دیگری تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی ثابت با زمان در راستای محور z ها قرار دارد را مد نظر می‌گیریم. با انتخاب مدل XY ناهمسانگرد هایزنبرگ[۷] همراه با اندرکنش DM ، هامیلتونی برای چنین سیستمی به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$H = J_x \sigma_1^x \sigma_2^x + J_Y \sigma_1^y \sigma_2^y + \vec{B}_1 . \vec{\sigma}_1 + \vec{B}_2 . \vec{\sigma}_2 + \vec{D} . (\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2) \quad (۱)$$

در رابطه (۱) ، $J_\mu(\mu = x, y)$ ضرایب جفت شدگی اسپین-اسپین حقیقی هستند. $\vec{\sigma}_j = (\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z)$ $\quad j=(1,2)$ ماتریس‌های پائولی زیر سیستم ها و $\vec{D}.(\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2)$ جمله اندرکنش DM است که از جفت‌شدگی اسپین-مدار به وجود می آید. بعلاوه $\vec{B}_1 = B_1 \hat{z}$ و $\vec{B}_2 = B_2 \hat{n}$ میدان های مغناطیسی خارجی با اندازه ثابت هستند که به ترتیب با اسپین ۱ و اسپین ۲ اندرکنش می‌کنند و $\vec{B}_2$ میدان مغناطیسی چرخان در صفحه $x-y$ می‌باشد. با انتخاب $\hat{n} = (\cos\phi(t), \sin\phi(t), 0)$، که در آن ϕ به صورت آرام از 0 تا $\phi(t=T) = 2\pi$ تغییر می‌کند (شرط بی‌دررو[۸] و چرخه‌ای)، اندرکنش DM را به صورت $\vec{D} = D\hat{z}$ انتخاب می کنیم. پس از محاسبات طولانی، ویژه مقادیر هامیلتونی بدست می آیند که برای اختصار از ذکر آن ها خودداری می کنیم. با فرض $J_x = J_Y = J$ (در نظر گرفتن جفت شدگی تبادلی همسانگرد[۹]) و معرفی متغیر $d = 2(J + iD)$ ویژه مقادیر هامیلتونی به صورت ذیل نوشته می شوند:

$$\xi_{1,2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2|k|^2 + 2|d|^2 + 4(B_1^2 + B_2^2)}$$
$$\xi_{3,4} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2|k|^2 + 2|d|^2 + 4(B_1^2 + B_2^2)} \quad (۲)$$

با تعریف پایه های استاندارد $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$، ویژه حالات مربوط به هامیلتونی عبارتند از:

$$|\Phi_j(t)\rangle = N_j \begin{bmatrix} F_j e^{-2i\phi(t)} \\ M_j e^{-i\phi(t)} \\ G_j e^{-i\phi(t)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (j = 1,2,3,4) \quad (۳)$$

۱. Quantum teleportation

۲. Quantum dense coding

۳. Quantum cryptography

۴. Quantum computing

۵. Ising model

۶. Amico

۷. Heisenberg mode

۸. Adiabatic

۹. Isotropic exchange coupling

که در روابط بالا از متغیرهای مستقل از زمان به صورت زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} F_j &= \frac{-4dB_2^2}{k_j} \\ M_j &= \frac{4d(B_1-\xi_j)B_2}{k_j} \\ G_{1,2} &= \frac{-2(|d|^2+|k|^2+4B_1^2-4\xi_{1,2}B_1)B_2}{k_{1,2}} \\ G_{3,4} &= \frac{-2(|d|^2-|k|^2+4B_1^2-4\xi_{3,4}B_1)B_2}{k_{3,4}} \end{aligned} \quad (٤)$$

در ضمن داریم:

$$\begin{aligned} |k|^2 &= \sqrt{16B_1^2B_2^2+4B_2^2|d|^2+|d|^4} \\ k_{1,2} &= 2\xi_{1,2}(|d|^2-|k|^2)+2B_1|k|^2+8B_1B_2^2-2B_1|d|^2 \\ k_{3,4} &= 2\xi_{3,4}(|d|^2+|k|^2)-2B_1|k|^2+8B_1B_2^2-2B_1|d|^2 \end{aligned} \quad (٥)$$

در رابطه (۳)، N_j ضریب بهنجارش برای j امین ویژه مقدار میباشد.

۳-تلاقی

یکی از معیارهای اندازه گیری درهم‌تنیدگی، تلاقی[۱۰] [۴] می باشد. برای محاسبه تلاقی، هر یک از ویژه حالات هامیلتونی سیستم را به صورت زیر بسط می‌دهیم. در ابتدا، پایه های بل را تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle+|\downarrow\downarrow\rangle) \\ |e_2\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle-|\downarrow\downarrow\rangle) \\ |e_3\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle) \\ |e_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned} \quad (٦)$$

که با استفاده از نمادگذاری اسپین ۱/۲ معرفی شده اند. وقتی که حالت $|\psi\rangle$ را در این پایه بسط دهیم یعنی $|\psi\rangle=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i|e_i\rangle$، با استفاده از کمیت تلاقی که به صورت زیر تعریف می‌شود، می‌توان درهم‌تنیدگی را اندازه‌گیری کرد:

$$C(|\psi(t)\rangle)=\left|\sum_i \alpha_i^2\right| \quad (7)$$

مقدار C از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند. اگر $C=0$ باشد، حالت سیستم درهم‌تنیده نیست و اگر $C=1$ باشد، حالت سیستم، بیشینه درهم‌تنیدگی را داراست. با در نظرگرفتن قضیه بی‌دررو در مکانیک کوانتومی، جواب تقریبی معادله شرودینگر با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle=|\Phi_j(0)\rangle$ مطابق $|\psi(t)\rangle=\exp[i(\delta_j+\gamma_j)]|\Phi_j(t)\rangle$ است که γ_j,δ_j به ترتیب فازهای دینامیکی و هندسی می‌باشند. واضح است که:

$$C(|\psi(t)\rangle)=C(|\Phi_j(t)\rangle)$$

با استفاده از معادله (۷) میتوان تلاقی ویژه حالات بی دررو را به صورت زیر در بدست آورد:

$$C(|\Phi_j\rangle)=2|N_j|^2|F_j-M_jG_j| \quad (9)$$

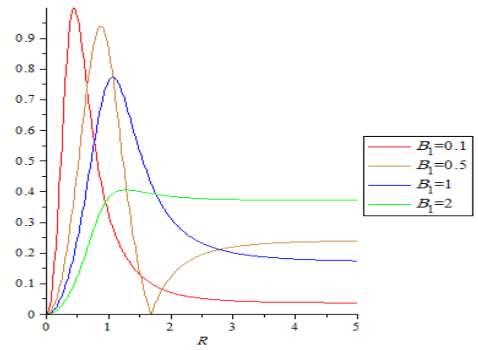
نکته قابل توجه این است که تلاقی وابسته به زمان نیست، پس درهم‌تنیدگی برای حالت بی دررو مستقل از زمان می‌باشد.

۴-مدل کالگرو – موزر [۵]

در یک شبکه اسپینی، مکان واقعی اسپین ها به دلیل تولید فونون ها به طور نوسانی تغییر میکند. در این حالت انتگرال های تبادلی توابعی از مکان بوده و به فاصله بین اسپین ها وابسته اند. لذا مطالعه تغییرات درهم‌تنیدگی با فاصله دارای‌اهمیت فراوانی است. در این قسمت می خواهیم حالات در هم‌تنیده دو کیوبیت که دارای اندرکنش تبادلی $J(R)$ که وابسته به فاصله بین کیوبیت ها می باشد را مورد بررسی قرار دهیم. به ویژه هدف مطالعه تاثیر این فاصله روی درهم‌تنیدگی سیستم می باشد. در مدل کالگرو – موزر نوع ۱، $J(R)$ یعنی ضریب اندرکنش تبادلی بین دو ذره را به صورت ذیل در نظر میگیریم:

$$J(R)=\frac{1}{R^2} \quad (10)$$

۱۰. concurrence

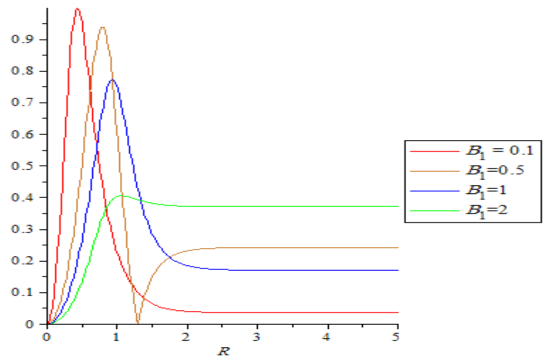


شکل(۱): تغییرات $C(|\Phi_3\rangle)$ نسبت به R به ازای $D=0.5$ و $B_2=1$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو – موزر نوع ۱.

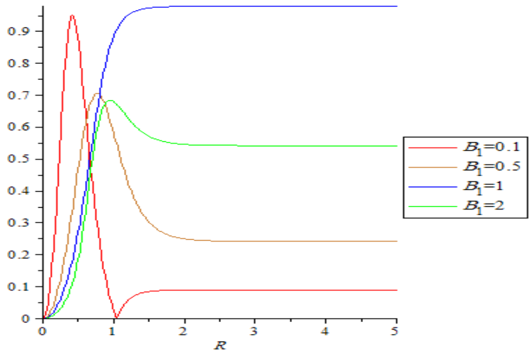
که نمودارهای آن در شکل های (۱) و (۲) رسم شده است. در مدل کالگرو– موزر نوع ۲ نیز $J(R)$ را به صورت ذیل در نظر میگیریم:

$$J(R)=\frac{1}{\sinh^2 R} \qquad (11)$$

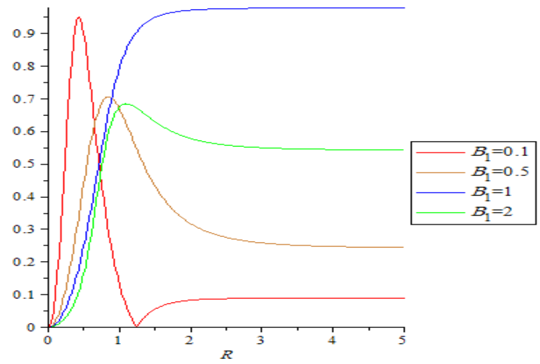
که در این مدل نیز فقط نمودارهای $C(|\Phi_3\rangle)$ و $C(|\Phi_4\rangle)$ را بررسی می کنیم (به شکل های (۳) و (۴) دقت شود). رفتار کلی این نمودارها بدین صورت است که نخست درهم‌تنیدگی با افزایش فاصله یک سیر صعودی را طی می کند که پس از رسیدن به یک حد بیشینه و یک کاهش مختصر، ثابت بودن درهم تنیدگی را در فواصل دور شاهد هستیم. برای مثال در شکل (۱) منحنی قرمز نشان دهنده $C(|\Phi_3\rangle)$ است که به ازای $D=0.5$، $B_2=1$ و $B_1=0.1$ رسم شده است. همانطور که ملاحظه می کنیم، منحنی دارای یک افزایش آرام رو به بالاست که این بدین معنی است که با افزایش R میزان درهم تنیدگی افزایش می یابد و دارای یک بیشینه در $R=0.436$ می باشد که در این نقطه اوج درهم تنیدگی را داریم و سپس به صورت آرام کاهش یافته و در $R\geq 8.417$ به صورت ثابت در می آید. به ویژه مشاهده می کنیم که در حالت آدیاباتیک $|\Phi_4\rangle$، حصول درهم تنیدگی بیشینه بین کیوبیت ها در فواصل دور به ازای $D=0.5$، $B_2=1$ و $B_1=1$ میسر می شود که نتیجه جالب توجهی است.



شکل (۲): تغییرات $C(|\Phi_4\rangle)$ نسبت به R به ازای $D=0.5$، $B_2=1$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو – موزر نوع ۱.



شکل (۳): تغییرات $C(|\Phi_3\rangle)$ نسبت به R به ازای $D=0.5$، $B_2=1$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو – موزر نوع 2.



شکل (۴): تغییرات $C(|\Phi_4\rangle)$ نسبت به R به ازای $D=0.5$، $B_2=1$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو – موزر نوع 2.

۵-نتیجه‌گیری

درهم‌تنیدگی یک سیستم دو کیوبیتی با فاصله بین کیوبیت ها، هنگامی که کیوبیت ها تحت تاثیر میدان مغناطیسی مختلف می باشند، در مدل XX هایزنبرگ همراه با اندرکنش دژیالوشنسکی- موریا (DM) مورد مطالعه قرار گرفت. نشان داده شد که تحت دو مدل کالگرو – موزر، درهم‌تنیدگی برای سیستم مذکور می تواند با افزایش فاصله بین کیوبیت ها افزایش یافته و به یک نقطه ی بیشینه برسد و پس از یک افت کوتاه برای فواصل طولانی بدون تغییر بماند. لذا ایجاد درهم‌تنیدگی بین کیوبیت هایی که در فواصل دور از یکدیگر قرار دارند، مستقل از اندرکنش بین آنها، که دارای اهمیت فراوانی است، میسر میشود.

مراجع

[۱] A Sørensen and K Mølmer, Phys. Rev. Lett . **83,** 2274 (1999).

[۲] T. J. Osborne and M. A. Nielsen, Phys. Rev. A **66**, 032110 (2002)
[۳] L. Amico, F. Baroni, A. Fubini, D. Patan`e, V. Tognetti, and P. Verrucchi, Phys. Rev. A **74**, 022322 (2006).
[۴] S. Hill and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997).
[۵] K. Hikami, M. Wadati, J. Phy. Soc. Jpn. **62**, 469 (1993)