بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
خوزستان، ایران.
۱۴-۱۲ بهمن ۱۴۰۰

استخراج فاز انواع فریزهای تداخلی تقریباً موازی و فریزهای بسته و تک‌فریز با استفاده از تبدیل موجک پیوسته یک بعدی و تبدیل هیلبرت

فرشته سخا[۱]، محمد یگانه[۲] و سیف‌اله رسولی[۳]

۱- گروه فیزیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، f.sakha٦١@gmail.com،

۲- مرکز ملی علوم و فنون لیزر ایران، تهران، moyeganeh@iasbs.ac.ir،

۳- دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، rasouli@iasbs.ac.ir.

چکیده- استخراج فاز از روی الگوهای تداخلی به‌روش‌های مختلفی صورت می‌پذیرد. زمانی‌که استخراج فاز از الگوی تداخلی واحد و با تعداد فریزهای کم و بدون مدولاسیون با یک فرکانس فضایی حامل مدنظر باشد، روش‌های معمول مثل فوریه و جابه‌جایی فاز قابل استفاده نیستند. در این کار استخراج فاز از روی طرح فریزهای تداخلی شبیه سازی شده با الگوی تقریباً موازی و با تعداد زیاد فریز، تک فریز و فریزهای بسته، با استفاده از روش موجک پیوسته‌ی یک بعدی و تبدیل هیلبرت، ارائه می‌شود. استخراج فاز برای فریزهای یکنواخت، حتی با تعداد کم با این روش به سادگی امکان‌پذیر است.

کلید واژه- استخراج فاز، تبدیل هیلبرت، موجک، فریز بسته، موجک مادر.

Phase extraction of quasi parallel interference fringes, single fringe and closed fringes using one-dimensional continuous wavelet transform and Hilbert transform

Fereshteh Sakha[۱], Mohammad Yeganeh[۲], and Saifollah Rasouli[۳]

۱- □□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□, □□□□□ □□□□□□□□□□, □□□□□, □□□□, □.□□□□□۶۱□□□□□□.□□□,

۲- □□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□ (□□□□), □□□□, □□□□□□□□□□□□□□□□.□□.□□,

۳- □□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□, □□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□ □□□□□□□ □□ □□□□□ □□□□□□□□, □□□□□□, □□□□,

rasouli@iasbs.ac.ir.

Abstract- Phase extraction is performed from interference patterns by different methods. Conventional methods such as Fourier and phase-shifting methods cannot be used on a single interference pattern having a small number of fringes without the use of modulation with a carrier spatial frequency. In this paper, the phase of quasi-parallel simulated interference fringes having a large number of fringes, a single fringe, and closed fringes, using the one-dimensional continuous wavelet method and Hilbert transform, is presented. Phase extraction for quasi-parallel fringes, even having a small number of fringes, is easily available with this method.

Keywords: closed fringe, Hilbert transform, mother wavelet, phase extraction, wavelet.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

مقدمه

استخراج اطلاعات فازی موجود در طرح‌های تداخلی مهم‌ترین هدف تحلیل فریزها است. برای بازسازی توزیع فاز از فریزهای تداخلی راههای متعددی گسترش پیدا کرده است[۱]. روش‌های موجود برای تحلیل فریزهای تداخلی در سه دسته طبقه‌بندی می‌شوند: حوزه‌ی فضا-زمان، مکان-فرکانس فضایی و فرکانس-زمانی. روش شیفت فازی به‌طورگسترده در حوزه‌های فضا-زمانی، برای استخراج فاز مورد استفاده قرار می‌گیرد[۲]. این روش بسیار دقیق است، اما برای تحلیل مواردی که در آن ارتعاش وجود دارد، یا مواردی که به اطلاعات در یک زمان مشخص نیاز است و فقط امکان ثبت یک طرح تداخلی وجود دارد، مثلاً در پدیده‌های دینامیکی مناسب نیست. بنابراین، تکنیک‌های حوزه‌ی فضا- فرکانسی مانند روش تبدیل فوریه از طرح تداخلی گسترش پیدا کرده‌اند. همچنین در روش شیفت فازی، پردازش یک طرح تداخلی، پیکسل به پیکسل انجام می‌شود، ولی در روش فوریه، پردازش کل فریز، هم‌زمان انجام می‌گیرد. این روش به نویزها مقاوم تر است، اما پیکسل‌ها روی‌هم اثر می‌گذارند. بنابراین یک مصالحه بین پردازش پیکسل به پیکسل و پردازش کلی لازم است. در حال حاضر روش‌های پیشرفته‌ای به وجود آمده‌اند، مانند روش ردیابی منظم فریز، تبدیل موجک و تبدیل فوریه‌ی پنجره‌ای. برای طرح‌های تداخلی با فریزهای حامل، روش فوریه به شرطی که فرکانس حامل شناخته شده باشد، به خوبی عمل می‌کند. در واقعیت این فرکانس هیچ‌گاه دقیق به‌دست نمی‌آید. همچنین به‌دلیل اینکه تبدیل فوریه یک عملیات کلی است، روش مناسبی برای آشکارسازی دقیق مشخصات جایگزیده‌ی یک سیگنال نیست. برای رفع این مشکلات، در مواردی که فقط یک طرح تداخلی وجود دارد، تکنیک‌های حوزه‌ی فرکانس- زمانی به خاطر قابلیت بالای آنها در حل این مشکلات، مانند تبدیل فوریه پنجره‌ای و تبدیل موجک پیوسته (CWT) در سال‌های اخیر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. تبدیل موجک پیوسته به عنوان روشی جایگزین برای تبدیل فوریه در بازه‌ی محدود ارائه گردید و هدف آن، فائق آمدن بر مشکلات مربوط به تفکیک در تبدیل فوریه بازه‌ی محدود است. در آنالیز موجک، مشابه با تبدیل فوریه بازه‌ی محدود، سیگنال مورد نظر در یک تابع موج ضرب می‌شود که در حقیقت نقش همان تابع پنجره را دارد. همچنین به طور مشابه با قبل، تبدیل موجک نیز به طور جداگانه بر روی قطعه‌های مختلف طرح انجام می‌شود. با این حال دو اختلاف عمده در ماهیت آن با تبدیل فوریه بازه‌ی محدود دارد؛ اولاً در تبدیل موجک از سیگنال پنجره شده، تبدیل فوریه گرفته نمی‌شود. دوماً در تبدیل موجک، عرض پنجره به موازات تغییر مؤلفه‌های فرکانسی تغییر می‌کند که مهم‌ترین ویژگی تبدیل موجک است.

مبانی نظری

تبدیل موجک پیوسته به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathrm{CWT}_f^{\psi}(l,\mathrm{s}) = \Psi_f^{\psi} = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Psi^*\left(\frac{x-l}{s}\right)\mathrm{d}x \,. \quad (۱)$$

در رابطه‌ی بالا l پارامتر انتقال است که میزان جابه‌جایی پنجره را نشان می‌دهد و s پارامتر مقیاس است که با فرکانس رابطه‌ی عکس ($s=\frac{1}{\upsilon}$) دارد. $f(x)$ سیگنال مورد نظر در حوزه‌ی مکان و Ψ تابع موجک مادر است. موجک مادر می‌تواند توابع متعددی را شامل شود و بسته به اینکه سیگنال با کدام یک مطابقت بیشتری دارد، می‌توانیم موجک مادر را انتخاب کنیم.

در این روش، طرح تداخلی سطر به سطر تحلیل می‌شود. بدین ترتیب که هر سطر را که انتخاب کردیم تبدیل موجک آن را حساب می‌کنیم. تبدیل موجک یک بعدی ردیف x در راستای y به‌صورت زیر داده می‌شود:

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

$$W(x,y,\xi)=\frac{1}{\sqrt{|s|}}\int_{+\infty}^{-\infty} I(x,y)[\Psi(\frac{y-\xi}{s})^{*}\,dy]. \quad (۲)$$

توزیع شدت فریز به صورت زیر است:

$$I(x,y)=I_0(x,y)\{1+v(x,y)\cos[\varphi(x,y)]\}, \quad (۳)$$

که I_0 دامنه و $v(x,y)$ نمایانی فریزهاست. موجک مادر انتخاب شده، موجک کلاه مکزیکی است.

برای استخراج فاز در این روش احتیاج به تصویر دومی داریم که به اندازه‌ی $\pi/2$ جابه‌جایی فاز پیدا کرده باشد. این کار با تبدیل هیلبرت انجام می‌شود[۳]. قبل از گرفتن تبدیل هیلبرت، با فرض اینکه $I_0(x,y)$ بسیار آرام تغییر کند، آنرا با فیلتر فرکانس پایین حذف می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$I_f=M(x)\cos[\varphi(x)],\ M(x)=I_0(x)v(x), \quad (۴)$$

و با اعمال تبدیل هیلبرت خواهیم داشت:

$$I_d=-M(x)\sin[\varphi(x)]. \quad (۵)$$

از تبدیل هیلبرت توزیع شدت، تبدیل موجک می‌گیریم:

$$W_d(x,y,\xi)=\frac{1}{\sqrt{|s|}}\int_{+\infty}^{-\infty} I_d(x,y)[\Psi(\frac{y-\xi}{s})^{*}dy]. \quad (۶)$$

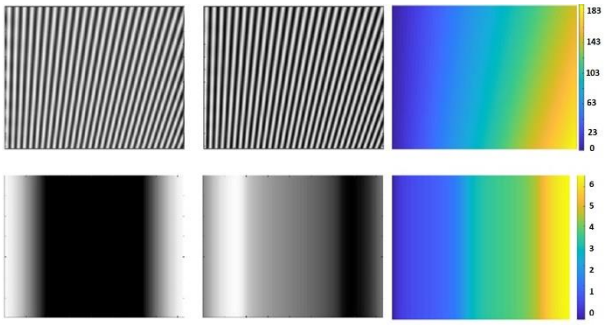
با داشتن تبدیل موجک سیگنالی که تبدیل هیلبرت به آن اعمال شده است، کمیت مختلط زیر را تعریف می‌کنیم:

$$W_s(x,s,\xi)=W(x,s,\xi)+iW_d(x,s,\xi). \quad (۷)$$

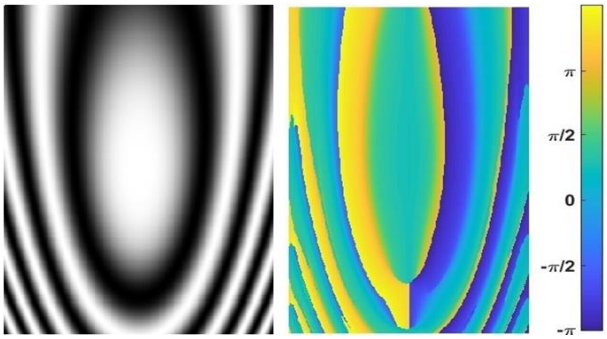
ضرایب موجک W_S ردیف x، یک ماتریس است که دامنه‌ی مدولاسیون و فاز آن به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases}\mathrm{ABS}(x,\xi)=|W_s(x,s,\xi)|,\\ \varphi(x,\xi)=\tan^{-1}\{\dfrac{\mathrm{Im}[W_s(x,s,\xi)]}{\mathrm{Re}[W_s(x,s,\xi)]}\}.\end{cases} \quad (۸)$$

برای محاسبه‌ی توزیع فاز ردیف x ، مقدار بیشینه‌ی ضریب مدولاسیون هر ستون را تعیین کرده و سپس فاز متناسب با آن را پیدا می‌کنیم. این فرآیند را برای تمام سطرها تکرار می‌کنیم. نتیجه، فازی است که به π گسسته شده است و نیازمند گسترش آن به 2π است[۵].



شکل ۱: توزیع فاز فریزهای تقریباً موازی با الگوریتم تبدیل موجک و تبدیل هیلبرت. ردیف اول از چپ به راست: فریز تقریباً موازی با تعداد زیاد، تبدیل هیلبرت فریز تقریباً موازی با تعداد زیاد، توزیع فاز فریزهای تقریباً موازی با تعداد زیاد. ردیف دوم از چپ به راست: تک فریز، تبدیل هیلبرت تک فریز، توزیع فاز تک فریز.



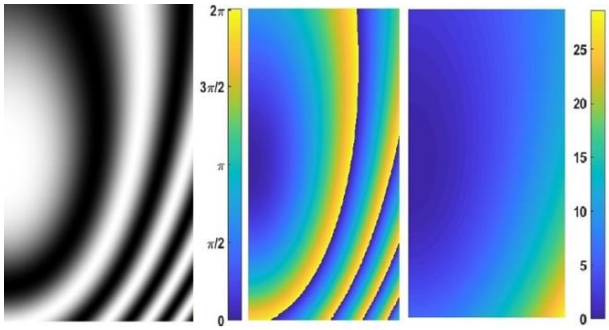
شکل ۲: چپ: فاز ناپیوسته‌ی تولید شده با روش موجک پیوسته یک بعدی بدون اعمال علامت در قسمت تبدیل هیلبرت، راست: فریز شبیه سازی شده.

نتایج شبیه سازی

در گام نخست فرآیند شبیه‌سازی، فاز فریزهای تقریباً موازی با تعداد زیاد را که کج هستند، بدست آوردیم. برای این کار ابتدا تبدیل هیلبرت فریز تداخلی محاسبه شد و سپس با برنامه‌ای که در فضای متلب برای استخراج فاز با استفاده از تبدیل موجک پیوسته‌ی یک بعدی نوشته شده بود، فاز الگوی تداخلی به‌دست آمد. مقدار کل تغییر فاز به‌دست آمده متناظر با طرح تداخلی شکل ۱، ردیف اول، برابر ۱۸۸/۶۷ رادیان بود که با مقدار فاز اولیه‌ی اعمالی برابر ۱۸۸/۴۰ رادیان هم‌خوانی خوبی دارد. در قسمت بعدی، فاز یک تک فریز را به‌دست آوردیم که با الگوریتم فوریه ممکن

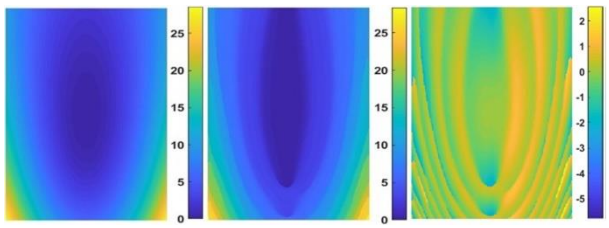
[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]

نیست. مقدارکل تغییر فاز به‌دست آمده متناظر با طرح تداخلی شکل ۱، ردیف دوم، برابر ۶/۲۶ رادیان بود که با مقدار فاز اولیه‌ی اعمالی برابر ۶/۲۸ رادیان هم‌خوانی خوبی دارد.



شکل ۳: از چپ به راست: فریز شبیه سازی نصف شده، فاز ناپیوسته استخراج شده با برنامه موجک پیوسته‌ی یک بعدی، فاز پیوسته

محاسبه‌ی فاز با این روش برای فریزهای ی تقریباً موازی با تعداد زیاد ، ساده است، چرا که در تبدیل هیلبرت تمام فریزها به اندازه‌ی $\pi/2$ در یک جهت تغییر فاز پیدا می‌کنند. مشکل زمانی ظاهر می‌شود که فریزها بسته باشند. در این حالت، چون ما با یک طرح فریز تنها سروکار داریم، هیچ اطلاعاتی در مورد علامت گرادیان فاز نداریم. نه تنها این الگوریتم، بلکه هیچ الگوریتم دیگری با یک طرح فریز نمی‌تواند بین گرادیان مثبت و منفی تمایز قائل شود. این مشکل را در شکل ۲ مشاهده می‌کنیم.



شکل ۴: چپ: فاز اولیه اعمالی که از روی آن فریزهای شکل ۲ شبیه‌سازی شده‌اند، وسط: فاز استخراج شده به‌روش موجک پیوسته‌ی یک بعدی و راست: اختلاف فاز استخراج‌شده با فاز اعمالی اولیه در نقاط مختلف سطح الگو.

برای فریزهای شبیه سازی شده که دارای تقارن هستند و نویز ندارند، طرح فریز را نصف کرده، علامت تغییر فاز را برای نیمه‌ی دوم تعیین می‌کنیم (شکل ۳)، سپس آن را برای دو طرف اعمال می‌کنیم. مقدار کل تغییر فاز به‌دست آمده متناظر با طرح تداخلی شکل ۲ برابر ۲۸/۳۵ رادیان بود که با مقدار فاز اولیه‌ی اعمالی برابر ۲۸/۵۹ رادیان هم‌خوانی خوبی دارد (شکل ۴). با این‌حال، در شکل ۴ اختلاف فاز استخراج شده با فاز اولیه تغییراتی تا حتی ۸/۳۳ رادیان را نیز نشان می‌دهد. این به‌معنی عدم تطابق دقیق فاز موضعی در تک‌تک نقاط، علی‌رغم تطبیق کلی الگوی فازی در کل الگوست.

نتیجه‌گیری

در این مقاله فاز فریزهای شبیه‌سازی شده‌ی تقریباً موازی با تعداد زیاد، تک فریز و فریزهای بسته با استفاده از برنامه‌ی موجک پیوسته‌ی یک بعدی با دقت بالایی بدست آمد. در گام بعدی می‌توان فاز را برای فریزهای بدست آمده در آزمایشگاه که دارای عدم تقارن و نویز هستند، با استفاده از تعیین رد فریز بدست آورد[۴] که نتایج آن در مقاله‌های بعدی گزارش خواهد شد.

منابع مورد استفاده

[۱] SS. Gorthi, "Spatial fringe analysis methods and their application to holographic interferometry and fringe projection techniques", EPFL; ۲۰۱۰.

[۲] Osten, Wolfgang, ed. Fringe ۲۰۰۵: *The 5th International Workshop on Automatic Processing of Finge Patterns*, Springer Science and Business Media, ۲۰۰۶.

[۳] Mustapha Bahich, Mohamed Afifi, Elmostafa Barj, “Optical phase extraction algorithm based on the continuous wavelet and the Hilbert transforms”, Journal of Computing, Volume ۲, Issue ۵, May ۲۰۱۰.

[٤] Xia Yang, Qifeng Yu and Sihua Fu, "A combined method for obtaining fringe orientations of ESPI " , Opt. Comm. Vol ۲۷۳, ٦٠-٦٦ (۲۰۰۷).

[۵] Ma J. Two-dimensional Continuous Wavelet Transform in Fringe Pattern Analysis (Doctoral dissertation, Catholic University of America), ۲۰۱۳.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-05]