بررسی و مقایسه روش های محاسباتی واپیچی فاز در سیستم های نویزی بازسازی فاز

محمدرضا جعفرفرد، راضیه عباسی
mrjafarfard@iust.ac.ir , razieh.abbasi۷۵@gmail.com

چکیده - بدست آوردن فاز تصویر نهایی در دیجیتال هولوگرافی و یا میکروسکوپ های فاز کمی در اکثر مواقع به دلیل شرایطی مانند درصد نویز بالا یا زیاد بودن فاز نمونه با مشکلاتی روبرو است. زمانی که اختلاف فاز نمونه و محیط از محدوده برد تابع تانژانت معکوس فراتر می رود باعث پرش هایی در تصویرفاز و یا به اصطلاح مشکل پیچش فاز می شود. راهکارهای واپیچی مختلفی برای حل این مشکل ارائه شده است که هر کدام محدودیت هایی مانند درصد نویز تصویر دارند. در این مقاله سه روش محاسباتی برای واپیچی فاز در سیستم های نویزی بازسازی فاز با استفاده از شبیه سازی در نرم افزار متلب ارائه می شود. ابتدا به معرفی سه روش محاسباتی برای رفع واپیچش فاز به نام های جریان شبکه، معادله انتقال شدت و روش قابلیت اطمینان پرداخته می شود و سپس این سه روش با شبیه سازی روی نمونه های گوسی با درصدهای نویز مختلف در نرم افزار متلب مقایسه می شوند.

کلید واژه- واپیچش فاز، دیجیتال هولوگرافی، اندازه گیری فاز

Investigation and comparison on computational methods for phase unwrapping in noisy phase retrieval systems

Mohammad Reza Jafarfard, Razieh Abbasi
mrjafarfard@iust.ac.ir , razieh.abbasi۷۵@gmail.com

Abstract – Obtaining the final phase image in digital holography or quantitative phase microscopy usually has some difficulties due to high percentage of the noise and the high amount of phase of samples. When the phase difference between sample and its medium is more than ۲π, the phase image contains many jump in the points out of the range of inverse tangent that called wrapping problem in phase imaging. Numerous methods have been reported that each of them contains some limitation such as the percentage of the noises. In this paper we present three numerical method for phase unwrapping using simulation in MATLAB. Firstly, we introduce the three methods named reliability method, minimum network flow method and resistance transfer equation method and we compare these methods by simulating on a Gaussian sample with different percentage of the noises.

Keywords: phase unwrapping, digital holography, phase measurement

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06]

مقدمه

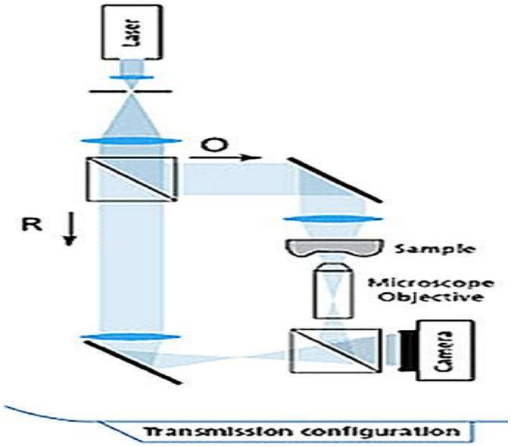
اندازه گیری فاز یک نمونه اطلاعات بسیار مهمی از ضریب شکست و ضخامت و یا ارتفاع آن به ما ارائه می دهد. در سالهای اخیر روشهای دیجیتال هولوگرافی و یا میکروسکوپ های فاز کمی به منظور اندازه گیری این پارامترها در صنعت و زیست شناسی توسعه های زیادی یافته اند. بیشتر روش‌های موجود دارای مشکلاتی مانند رزولوشن ، سرعت کم و عدم ارائه اطلاعات کمی فاز می باشند. همچنین از این جهت که فاز سیگنال از رابطه تانژانت معکوس بدست می‌آید و برد این تابع در محدوده [-π,+π] می‌باشد، در الگوریتم بازسازی فاز مقادیر بیشتر یا کمتر از این محدوده را تشخیص داده نمی شود و سبب پیچش و ابهام فاز می‌شود. راهکارهای زیادی برای حل این مشکل پیشنهاد شده است که هر کدام مزیت ها و ضعف هایی دارند. در این مقاله سه نوع روش محاسباتی واپیچش فاز جریان شبکه، معادله انتقال شدت و قابلیت اطمینان برای سیگنال های نویزی، توضیح و ارائه شده است و با استفاده از نرم افزار متلب این سه روش بر روی یک فاز گوسی شبیه سازی شده اجرا و مقایسه می شود.

واپیچش فاز

به منظور بازسازی فاز روشهای بسیار متعددی پیشنهاد شده است. به عنوان مثال یکی از چیدمانهای میکروسکوپ فاز کمی در شکل(۱) نشان داده شده است. این چیدمان مربوط به نمونه یک نمونه شفاف است، و تصویر با استفاده از نوری که از نمونه عبور می کند، ایجاد می شود. شدت نوری که به دوربین وارد می شود به صورت زیر بدست می آید:

$$I(x) = I_R I_S(x) + ۲[\, I_R I_S(x)]^{۱/۲} \cos[qx + \varphi(x)] \quad (۱)$$

که می توان فاز را با استفاده از ساخت یک سیگنال مختلط و انتگرال تبدیل هیلبرت بازسازی کرد:



شکل(۱): مثالی چیدمان های مختلف میکروسکوپ اندازه گیری فاز

$$z(x) = \frac{۱}{۲}u(x) + i\frac{p}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(x')}{x-x'} \quad (۲)$$

فاز سیگنال از رابطه $\Phi(x) = tan^{-۱}\{\frac{Im[z(x)]}{Re[z(x)]}\}$ بدست می آید[۱]. برد این تابع از $-\pi$ تا π است و اگر فاز بیشتر از π یا کمتر از $\pi-$شود، فاز نهایی آن را تشخیص نمی دهد و سبب پیچش فاز می شود. از آنجا که فاز پیچیده شده، یک عکس کاملا مبهم است، برای بدست آوردن تصویر واقعی می بایست با استفاده از روشهای واپیچی پیچش فاز را از بین برد.

الگوریتم واپیچش متداول با اضافه کردن ۲π

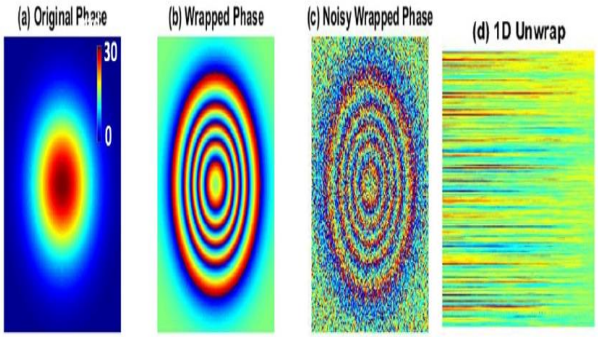
در این روش ابتدا مضرب های صحیح p(i) از ۲π به فاز پیچیده اضافه می کنیم p(i) از اختلاف فاز پیکسل های مجاور به صورت اضافه کردن مضارب ۲π به نقاط ناپیوستگی $\Delta\varphi$ بدست می آید.

$$\varphi_{unwrap}(i) = \varphi_{wrap}(i) + ۲\pi.p(i) \quad (۳)$$
$$\Delta\varphi_{wrap}(i) = \varphi_{wrap}(i) - \varphi_{wrap}(i-۱) \quad (۴)$$

برای مقادیر فاز بیشتر از π مقدار مضرب ۲ کم یا اضافه می شود تا اختلاف فاز بین دو پیکسل کم تر از π شود و بدین صورت واپیچی انجام میشود. این روش کاملا متداول است و به صورت یک تابع معروف در داخل برنامه متلب وجود دارد. اما زمانی که مقدار نویز بالا می رود این روش کارایی خود را از دست می دهد. برای مثال در شکل ۲ عدم کارایی این روش در بازسازی فاز نشان داده شده است. قسمت (a) شبیه سازی یک سیگنال گوسی و در قسمت (b) ، فاز پیچیده سیگنال که در داخل تابع نانژانت معکوس قرار گرفته است، نشان می دهد. قسمت (c) ، به این فاز گوسی مقداری نویز اضافه شده است که در شکل (d) با روش اضافه کردن مضارب ۲ اطلاعات فاز بازسازی شده است. همانگونه که مشاهده میشود واپیچش در مقدار نویز بالا به

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06]

درستی انجام نمی شود و نیاز به روش های دیگر برای واپیچش فاز است.



شکل(۲): واپیچش یک نمونه فاز گوسی نویزی

روش واپیچش با معادله انتقال شدت

در این روش واپیچش فاز با حل معادله پواسون به صورت زیر انجام میشود[۲]:

$$\frac{\partial^2 \Phi\left(x,y\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi\left(x,y\right)}{\partial y^2}=\nabla^2\varphi\left(x,y\right) \qquad (۵)$$

که در آن φ فاز پیچیده و ϕ فاز واپیچیده و ∇^2 عملگر لاپلاسین می باشد. با استفاده از روش پاندی با مشتق محوری شدت متمرکز شده در راستای x و y معادله بالا به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial^2 \Phi\left(x,y\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi\left(x,y\right)}{\partial y^2} = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{I(x.y.z+\Delta z)-I(x.y.z-\Delta z)}{2\Delta z} \qquad (۶)$$

که در آن $I\left(x,y,z\right)$ شدت طرح تداخلی ثبت شده روی دوربین است. مارتین کرنزا با انتگرال ریلی سامرفیلد راه حل زیر را ارائه داد:

$$\frac{\partial^2 \Phi\left(x,y\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi\left(x,y\right)}{\partial y^2} = Im\left[e^{-i\varphi\left(x,y\right)}\nabla^2\left(e^{-i\varphi\left(x,y\right)}\right)\right] \qquad (۷)$$

با قرار دادن $\nabla(I\nabla\Phi) = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\partial I}{\partial z}$فاز واپیچش شده با روش تبدیل کسینوس گسسته به صورت زیر بدست می آید:

$$\Phi(x.y) = IDCT[\frac{DCT(Im[e^{-i\varphi(x.y)}.\nabla^2\left(e^{i\varphi(x.y)}\right])}{2\left(cos\left(\pi\frac{x}{M}\right)+cos\left(\pi\frac{y}{N}\right)-2\right)}] \qquad (۸)$$

که در آن DCT تبدیل کسینوس گسسته و IDCT تبدیل کسینوسی معکوس می باشد. با توجه به تجزیه و تحلیل بالا ، الگوریتم زیر برای به دست آوردن نقشه فاز صحیح پیشنهاد می شود:

۱-فاز پیچیده φ از طرح تداخلی بدست می آید.

۲- معادله(۱۱) را برای اینکه اولین فاز واپیچش شده Φ_1 را با استفاده از فاز φ تخمین بزنیم به کار می بریم.

۳- اولین عدد صحیح k_1 را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$k_1 = \frac{\Phi_1-\varphi}{2\pi} \qquad (۹)$$

۴- دومین فاز واپیچش را به صورت زیر بدست می آوریم

$$\Phi_2 = \varphi + 2k_1\pi \qquad (۱۰)$$

۵- اختلاف بین Φ_1 وΦ_2 را بدست می آوریم و آن را ζ می نامیم.

۶- در معادله (۱۱) به جای φ ، مقدارζ را قرا می دهیم و حاصل را φ_C می نامیم.

۷- φ_C را در این رابطه قرار داده و مقدار جدید Φ_1 را با رابطه $\Phi_1 = \Phi_1 + \Phi_c$ بدست می آوریم.

۸- دومین عدد صحیح k_2 را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$k_2 = round\left(\frac{\Phi_1-\varphi}{2\pi}\right) \qquad (۱۱)$$

۹- k_2 بدست آمده را در رابطه زیر قرار می دهیم.

$$\Phi_2 = \varphi + 2k_2\pi \qquad (۱۲)$$

۱۰- در صورتی که $abs(k_1-k_2)>0$ مراحل ۵ تا۱۰ را دوباره تکرار می کنیم تا زمانی که $K_1 = K_2$ شود. Φ_2 فاز واپیچیده خروجی است.

روش واپیچش قابلیت اطمینان

ابتدا پنجره ۳ × ۳ شامل پیکسل ای متعامد و مورب به صورت زیر در نظر می گیریم[۳]. برای پیکسل $(i.j)$، اختلافات دوم (D) با معادله زیر محاسبه می شود:

$$D(i.j) = [H^2(i.j)+V^2(i.j)+D_1^2(i.j)+D_2^2(i.j)]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۳)$$

که در آن

$$H(i.j) = \gamma[\varphi(i-1.j)-\varphi(i.j)] - \gamma[\varphi(i.j)-\varphi(i+1.j)] \qquad (۱۴)$$

$$V(i.j) = \gamma[\varphi(i.j-1)-\varphi(i.j)] - \gamma[\varphi(i.j)-\varphi(i.j+1)] \qquad (۱۵)$$

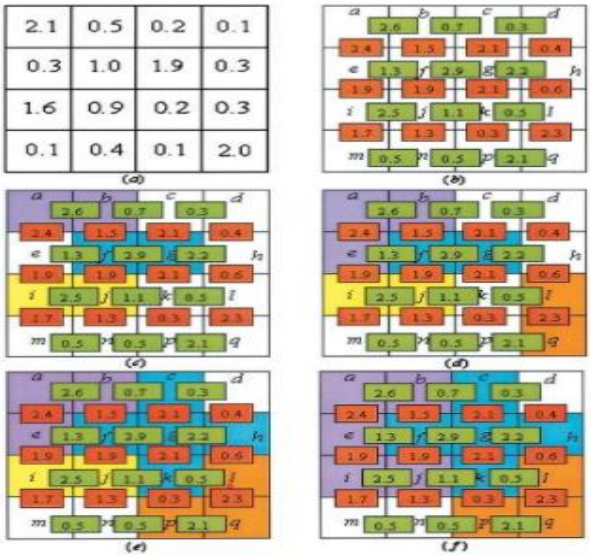
$$D_1(i.j) = \gamma[\varphi(i-1.j-1)-\varphi(i.j)] - \gamma[\varphi(i.j)-\varphi(i+1.j+1)] \qquad (۱۶)$$

$$D_2(i.j) = \gamma[\varphi(i-1.j+1)-\varphi(i.j)] - \gamma[\varphi(i.j)-\varphi(i+1.j-1)] \qquad (۱۷)$$

که در آن $\gamma((\cdot))$عملگر واپیچش برای حذف پرش های 2π بین دو پیکسل متوالی است. قابلیت اطمینان R یک پیکسل به این صورت $R = \frac{1}{D}$ تعریف می شود. پس از محاسبه مقدار R لبه های تلاقی هر

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06]

دو پیکسل مجاور چپ و راست و بالا و پایین را درنظرمی گیریم. مقدار قابلیت اطمینان هر دو پیکسل را با هم جمع کرده و روی لبه ها قرار می دهیم.لبه هایی که مقدار قابلیت اطمینان بالاتر دارند ابتدا واپیچش می شوند.تمامی مقادیر R در یک آرایه دخیره و از صعودی به نزولی مرتب می شود.در ابتدا پیکسل ها ،متعلق به هیچ گروهی نیستند.ابتدا f و g با هم واپیچش می شوند و با رنگ آمیزی یکسان در یک گروه قرار می گیرند.سپس a و b در گروه دوم و سپس i و j در گروه سوم واپیچش می شوند. دو گروه۱ شامل a و b و e وگروه ۲شامل i و j ،گروه دوم دارای پیکسل های کم تر است .گروه ۱و یکی از پیکسل های گروه ۲ محاسبه می شود.مضرب 2π به پیکسل های گروه کوچکتر اضافه یا کم می شو تا واپیچش شود. پنج پیکسل به یکدیگر متصل شده و در یک گروه قرار می گیرند. الگوریتم در تمام پیکسل ها تکرار می شود تا همه پیکسل ها واپیچش شوند.



شکل(۳):مراحل واپیچش قابلیت اطمینان[۳]

روش واپیچش با جریان شبکه

این روش به نام روش کنستانتینی معروف است که در مرجع [۴] به طور کامل توضیح داده شده است. این روش بر اساس این حقیقت بنا شده است که اختلاف فاز بین دو پیکسل همسایه را می توان با یک عددضربدر عدد 2π تخمین زد. در این روش مسئله واپیچش فاز با مسئله پیدا کردن حداقل جریان شبکه شباهت دارد که در آن با انتخاب وزن تابع مینیمم مربعات به عنوان معیار خطا، واپیچشش فاز با پیدا کردن کمترین هزینه بر جریان یک شبکه انجام میشود.

نتایج

در این تحقیق، یک تابع فاز گاوسی با ماکزیمم فاز 20π رادیان به عنوان یک نمونه در داخل طرح تداخلی شبیه سازی شد. سپس به این تابع نویز رندوم با دامنه های مختلف اضافه شد. فاز گوسی ساخته شده در داخل طرح تداخلی با استفاده از روش هیلبرت استخراج شدکه نتیجه آن یک فاز پیچیده بود (مانند شکل ۲). سپس بر روی فاز بازسازی شده ی پیچیده، سه روش توضیح داده شده در این مقاله یعنی روش جریان شبکه ،روش معادله انتقال شدت و روش قابلیت اطمینان در محیط متلب اعمال شد و فاز واپیچیده بدست آمد. سپس دامنه نویز را برای هر روش تغییر دادیم تا محدوده کارایی هر روش و توانایی واپیچشش آن را مقایسه شود. با اضافه کردن پیوسته مقدار نویز و پیدا کردن مقدار ماکزیممی که هر روش کارایی واپیچش خود را از دست می دهد، توانایی روش مورد نظر در واپیچی فاز سنجیده شد. برای مثال در روش قابلیت اطمینان دامنه نویز تصادفی از صفر کم کم بالا برده شد و هر بار نتیجه بازسازی فاز مشاهده شد. مشاهده به ما نشان داد برای دامنه نویز بیشتر از ۱،۸ رادیان روش قابلیت اطمینان توانایی واپیچش درستی ندارد و برای اعداد بزرگتر این توانایی کمتر و کمتر میشود. برای هر سه روش توضیح داده شده در این مقاله این کار صورت گرفت و ماکزیمم مقدار نویزی که هر روش قابلیت واپیچش فاز داشت، بدست آمد. نتایج به دست آمده در جدول شماره ۱ نشان داده شده است. همان گونه که مشاهده می شود به ترتیب روش جریان شبکه و سپس روش انتقال شدت و پس از آن روش قابلیت اطمینان از قدرت بهتری نسبت به روش متداول واپیچی برخوردار هستند.

روش واپیچش	ماکزیمم مقدار نویز(رادیان)
روش جریان شبکه	۳/۸
روش معادله انتقال شدت	۳/۱
روش قابلیت اطمینان	۱/۸
روش متداول	۱/۱

جدول۱- قابلیت واپیچی هر روش بر اساس ماکزیمم مقدار نویز

نتیجه گیری

واپیچشش فاز یکی از چالش های مهم در بازسازی فاز است. روش متداول اضافه کردن 2π در نقاط پرش معمولا در نویزهای با مقدار بالا کارایی خود را از دست می دهد. در این مقاله سه روش خاص بازسازی فاز در محیط متلب نوشته شد و یک تابع فاز پیچیده نویزی توسط این روشها واپیچیده شد. سپس با اضافه کردن مقدار ماکزیمم نویز محدوده کارایی این سه روش مقایسه شد. نتایج نشان داد که روش جریان شبکه

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06]

و سپس روش انتقال شدت و پس از آن روش قابلیت اطمینان محدوده کارایی بیشتری در واپیچشش فاز دارند.

مرجع‌ها

[۱]: Ikeda, Takahiro, et al. "Hilbert phase microscopy for investigating fast dynamics in transparent systems." Optics letters, ۱۱٦٥-۱۱٦۷ (۲۰۰٥)

[۲] M. Costantini, "A novel phase unwrapping method based on network programming," IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, ۸۱۳-۸۲۱ (۱۹۹۸)

[۳] Miguel Arevallilo Herráez, David R. Burton, Michael J. Lalor, and Munther A. Gdeisat, "Fast two-dimensional phase-unwrapping algorithm based on sorting by reliability following a noncontinuous path." Appl. Opt. ۷۴۳۷-۷۴۴۴ (۲۰۰۲)

[٤] Zhao, Zixin, et al. "Robust ۲D phase unwrapping algorithm based on the transport of intensity equation." Measurement Science and Technology, ۰۱٥۲۰۱ (۲۰۱۸)

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06]