



بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
خوزستان، ایران.
۱۴-۱۲ بهمن ۱۴۰۰



کنترل درهم‌تنیدگی اتم-فوتون از طریق مدوله‌سازی فرکانس

محدثه فروزش^۱، علی مرتضی پور^۲

^۱دانشکده علوم پایه دانشگاه گیلان، بلوار نامجو، رشت، گیلان، mohadese.forouzesah@gmail.com

^۲دانشکده علوم پایه دانشگاه گیلان، بلوار نامجو، رشت، گیلان، mortezapour@guilan.ac.ir

چکیده: در این مطالعه، تأثیر مدوله‌سازی فرکانس بر رفتار دینامیکی درهم‌تنیدگی اتم-فوتون در داخل یک کاواک نشست‌کننده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مشخص شده است که پارامترهای مدوله‌سازی بهینه‌ای وجود دارد که سبب می‌شود در سیستم مورد آزمایش، درهم‌تنیدگی اتم-فوتون برای مدت طولانی حفظ شود.

کلیدواژه: درهم‌تنیدگی اتم-فوتون، کیوبیت، مدوله‌سازی فرکانس

Controlling atom-photon entanglement under frequency modulation

Mohadese Forouzesah, Ali Mortzapour

Department of Physics, University of Guilan, P. O. Box ۴۱۳۳۵-۱۹۱۴, Rasht, Iran

mohadese.forouzesah@gmail.com, mortezapour@guilan.ac.ir

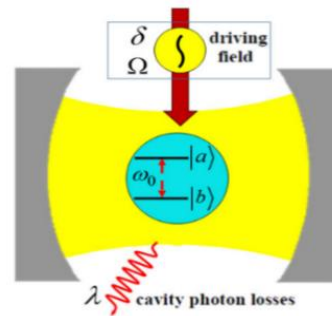
Abstract- In this study, we investigate the effect of frequency modulation on the dynamic behavior of atom-photon entanglement within a leaky cavity. It has been shown that there are optimal modulation parameters that maintain atom-photon entanglement in the test system for a long time.

Keywords: atom-photon entanglement, qubit, frequency modulation

مقدمه

مفهوم درهم‌تنیدگی کوانتومی برای اولین بار توسط انیشتین، پودولسکی و روزن در سال ۱۹۳۵ مطرح شد [۱]. درهم‌تنیدگی می‌تواند در نتیجه برهم‌کنش مستقیم یا غیرمستقیم بین سیستم‌های مختلف ایجاد شود. درهم‌تنیدگی ایجاد شده با استفاده از فعل و انفعالات اتم-میدان به برهم‌کنش مستقیم متکی است که به طور گسترده در شکل‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در هر سیستم واقعی، در اثر برهم‌کنش اجتناب‌ناپذیر بین سیستم و محیط پیرامون، درهم‌تنیدگی به راحتی از بین می‌رود. در این راستا چندین راهبرد برای طولانی شدن زمان پایداری درهم‌تنیدگی پیشنهاد شده است. برای مدوله‌سازی فرکانس در یک کیوبیت اتمی می‌توان از یک میدان غیرتشدیدی خارجی استفاده کرد. [۲]

محاسبه ماتریس چگالی تک کیوبیتی



شکل ۱: یک سیستم تک کیوبیتی با فرکانس گذار ω_0 که توسط یک میدان خارجی سینوسی با دامنه δ و فرکانس Ω مدوله می‌شود.

شکل ۱ یک سیستم تک کیوبیتی (سیستم دو تراز) را نشان می‌دهد که در دمای صفر قرار دارد. کیوبیت مورد نظر با یک میدان کلاسیکی با فرکانس $\omega(t)$ و مدهای الکترومغناطیسی خلأ کاواک برهم‌کنش می‌کنند. معادله هامیلتونی این مدل در تقریب دو قطبی و موج چرخان به صورت زیر توصیف می‌شود ($\hbar = 1$):

$$\hat{H} = \frac{\omega(t)}{2} \hat{\sigma}_z + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_k \{g_k \hat{\sigma}_+ \hat{a}_k + g_k^* \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_-\}, \quad (1)$$

به طوری که $\hat{\sigma}_\pm = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$ و $\hat{\sigma}_j$ با $j = x, y, z$ به $j = x, y, z$ ماتریس پائولی، \hat{a}_k و \hat{a}_k^\dagger عملگرهای نابودی و خلق فوتون مربوط به مد k ام کاواک، g_k ثابت جفتیدگی بین کیوبیت و مد k ام کاواک و اتم است. علاوه بر این، $\omega(t)$ فرکانس گذار وابسته به زمان بین حالت های $|a\rangle$ و $|b\rangle$ کیوبیت را نشان می‌دهد، که به صورت $\omega(t) = \omega_0 + \delta \cos \Omega t$ ، در اینجا δ و Ω به ترتیب دامنه و فرکانس مدولاسیون را نشان می‌دهند. در چارچوب مرجع چرخان که توسط تبدیل یکانی زیر تعریف شده است:

$$\hat{U} = \exp \left[-i \left\{ [\omega_0 t + (\delta / \Omega) \sin \Omega t] \hat{\sigma}_z / 2 + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k t \right\} \right], \quad (2)$$

هامیلتونی تبدیل شده $\hat{H}_{eff} = \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} + i(\partial \hat{U}^\dagger / \partial t) \hat{U}$ را به شرح زیر بدست می‌آوریم:

$$\hat{H}_{eff} = \sum_k g_k \hat{\sigma}_+ \hat{a}_k e^{-i(\omega_k - \omega_0)t} e^{i(\delta / \Omega) \sin \Omega t} + \sum_k g_k^* \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_- e^{i(\omega_k - \omega_0)t} e^{-i(\delta / \Omega) \sin \Omega t} \quad (3)$$

فرض می‌کنیم حالت اولیه سیستم به صورت زیر باشد:

$$|\Psi(0)\rangle = \{\cos(\theta/2)|a\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|b\rangle\}|0\rangle. \quad (4)$$

بنابراین، با گذشت زمان $t > 0$ می‌توان حالت کل سیستم را به صورت زیر نوشت:

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\theta/2)A(t)|a,0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|b,0\rangle + \sum_k B_k(t)|b,1_k\rangle, \quad (5)$$

که در آن $|1_k\rangle$ حضور یک تک فوتون را در مد k ام میدان کاواک توصیف می‌کند و $B_k(t)$ دامنه احتمال آن را مشخص می‌نماید. از آنجا که تحول بردار حالت با معادله

کاهش یافته کیوبیت $\rho_q(t)$ را در زمان دلخواه به دست آورد.

بحث و بررسی

در این بخش، هدف ما درک این موضوع است که چگونه مدوله سازی فرکانس می تواند بر دینامیک درهم تنیدگی ایجاد شده بین خود کیوبیت و فوتون ناشی از واپاشی تحریک کیوبیت تأثیر بگذارد. تاکنون سنجه های فراوانی برای سنجش درهم تنیدگی بین زیرسامانه های مختلف معرفی شده است. در اینجا با توجه به اینکه حالت اولیه سیستم یک حالت خالص است بهترین سنجه ممکن برای سنجش میزان درهم تنیدگی آنتروپی فن نویمان می باشد. فونیکس و نایت [۳] نشان داده اند که برای یک سیستم دو بخشی که از حالت اولیه خالص شروع می شود، آنتروپی کوانتومی کاهش یافته (آنتروپی فن نویمان) می تواند به عنوان معیاری برای تعیین درجه درهم تنیدگی بین دو زیرسیستم استفاده شود. همچنین نشان داده شده است که رابطه مستقیمی بین آنتروپی کوانتومی کاهش یافته و درهم تنیدگی وجود دارد. به طوری که هر چه آنتروپی کوانتومی کاهش یافته بیشتر باشد، درهم تنیدگی بیشتر است. از این رو برای تحقق هدف خود، ما نیز همین کار را انجام می دهیم و از آنتروپی فن نویمان کیوبیت استفاده می کنیم که به صورت زیر تعریف شده است:

$$S_q(t) = -\text{Tr}[\rho_q(t) \ln \rho_q(t)], \quad (11)$$

طبق تعریف، $S_q = 0$ حالت خالص را نشان می دهد، در مقابل $S_q = \ln 2$ مربوط به حداکثر درهم تنیدگی برای یک سیستم در معرض محیط است. شکل ۲ رفتار دینامیکی آنتروپی کاهش یافته کیوبیت $S_q(t)$ برای مقادیر مختلف فرکانس مدوله سازی وقتی دامنه مدولاسیون برابر $\delta = 5\gamma$ باشد را نشان می دهد. در نتیجه اعمال میدان و برهم کنش بین مدهای کیوبیت و کاواک، کیوبیت و واپاشی تابشی آن

شرویدینگر مطابقت دارد، می توان معادله (۲) را در معادله شرویدینگر جایگزین کرد که معادله دیفرانسیل-انتگرال را برای $A(t)$ به دست می آورد:

$$\dot{A}(t) + \int_0^t dt' K(t, t') A(t') = 0, \quad (6)$$

که در آن تابع هسته کرنل $(K(t, t'))$ در حد شبه پیوستار مدهای کاواک به صورت زیر به دست می آید:

$$K(t, t') = \exp[i(\delta/\Omega)\{\sin \Omega t - \sin \Omega t'\}] \times \int_0^\infty J(\omega_k) e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-t')} d\omega_k, \quad (7)$$

در اینجا $J(\omega_k)$ چگالی طیفی مدهای کاواک را نشان می دهد. برای یک کاواک با ساختار معمول، چگالی طیفی دارای فرم توزیع لورنتزی زیر است:

$$J(\omega_k) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma \lambda^2}{[(\omega_0 - \omega_k)^2 + \lambda^2]}, \quad (8)$$

λ پهنای توزیع کمی فوتون های نشت شده از آینه های کاواک است. زمان همبستگی منبع توسط $\tau_r = \lambda^{-1}$ داده می شود. از طرف دیگر، پارامتر γ نشان دهنده واپاشی از حالت برانگیخته کیوبیت در حد مارکوفی است و با رابطه $\tau_q \approx \gamma^{-1}$ به زمان واهلش کیوبیت τ_q مربوط می شود. با توجه به معادله (۸)، می توان فرم تحلیلی $K(t, t')$ را به دست آورد:

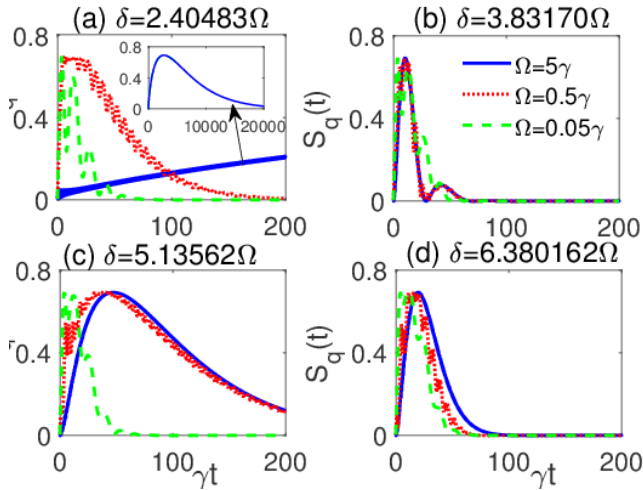
$$K(t, t') = \frac{\gamma \lambda}{2} e^{-\lambda(t-t')} \exp[i(\delta/\Omega)\{\sin \Omega t - \sin \Omega t'\}]. \quad (9)$$

با حل معادله زیر می توان دامنه احتمال را به دست آورد:

$$\dot{A}(t) + \frac{\lambda \gamma}{2} \exp[i(\delta/\Omega)\sin \Omega t] \times \int_0^t \exp[-i(\delta/\Omega)\sin \Omega t'] e^{-\lambda(t-t')} A(t') dt' = 0. \quad (10)$$

با محاسبه $A(t)$ و با استفاده از معادله (۵)، می توان با ردگیری از متغیرهای محیط، شکل صریح عملگر چگالی

از این رو در شکل‌های ۲ و ۳ وقتی $\mathcal{T} = x$ باشد، آنگاه زمان واقعی برابر با $t = 100(x)ns$ می‌باشد.



شکل ۳: آنتروپی کیوبیت $S_q(t)$ به ازای زمان بی بعد \mathcal{T} برای مقادیر

مختلف دامنه مدولاسیون: (a) $\delta = 2.40483 \Omega$ ، (b)

$\delta = 3.83170 \Omega$ (c) $\delta = 5.13562 \Omega$ و (d)

$\delta = 6.38016 \Omega$ برای مقادیر مختلف فرکانس مدولاسیون:

$\Omega = 0.05\gamma$ (خط چین سبز)، $\Omega = 0.5\gamma$ (نقطه چین قرمز)،

$\Omega = 5\gamma$ (خط آبی). سایر پارامترها مانند شکل ۲ در نظر گرفته شده‌اند.

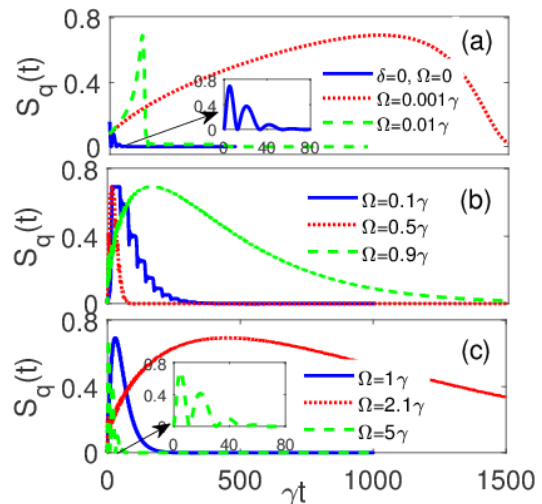
نتیجه‌گیری

در این مطالعه تأثیر مدوله‌سازی فرکانس را بر رفتار دینامیکی درهم‌تنیدگی اتم-فوتون در داخل یک کاواک نشت‌کننده مورد مطالعه قرار دادیم. مطالعه ما نشان می‌دهد که مدوله‌سازی فرکانس یک تک کیوبیت قادر به اصلاح زمان بقای درهم‌تنیدگی اتم-فوتون است.

مرجع‌ها

- [۱] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?," Phys. Rev. ۴۷, ۷۷۷ (۱۹۳۵).
- [۲] M. W. Noel, W. M. Griffith, and T. F. Gallagher, "Frequency-modulated excitation of a two-level atom," Phys. Rev. A ۵۸, ۲۲۶۵ (۱۹۹۸).
- [۳] S. J. D. Phoenix and P. L Knight, "Comment on "Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: an example of state preparation by a quantum apparatus," Phys. Rev. Lett. ۶۶, ۲۸۳۳ (۱۹۹۱).

به طور آنی درهم‌تنیده می‌شوند. اتفاق جالب، بقای طولانی مدت درهم‌تنیدگی اتم-فوتون به ازای مقادیر $\Omega = 0.001\gamma$ ، $\Omega = 0.9\gamma$ و $\Omega = 2.1\gamma$ است. از سوی دیگر، نمودارها نشان می‌دهند که برای مقادیر زیاد فرکانس مدولاسیون $\Omega \geq 5\gamma$ درهم‌تنیدگی بسیار ضعیف است و زمان بقای آن حتی از حالتی که مدوله‌سازی خاموش است، کوتاه‌تر است.



شکل ۴: آنتروپی کیوبیت $(S_q(t))$ به ازای زمان بی بعد \mathcal{T}

مقادیر سایر پارامترها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\phi = 0, \theta = 0, \lambda = 0.1\gamma, \delta = 5\gamma$$

شکل ۳ رفتار دینامیکی آنتروپی کاهش یافته کیوبیت را به ازای مقادیر مختلف نسبت δ/Ω نشان می‌دهد. روی صفر همانطور که در شکل ۳ (a) مشخص است، زمان بقای درهم‌تنیدگی کیوبیت-فوتون با افزایش فرکانس مدوله‌سازی به میزان قابل توجهی طولانی می‌شود. شکل ۳ (c) نیز این رفتار را تا حدودی تایید می‌کند. با این حال، منحنی‌های شکل ۳ (b) و (d) باعث می‌شود که چنین رفتاری را تعمیم ندهیم. البته شایان ذکر است که نسبت‌های دیگر δ/Ω و مقادیر بزرگتر Ω مورد بررسی قرار گرفتند اما مورد بهتری که بتوان آن را جایگزین $\delta = 2.40483 \Omega$ و $\Omega = 5\gamma$ کرد (خط آبی شکل ۳ (a)) یافت نشد. شایان ذکر است که در کیوبیت‌های ابررسانای معمولی $\tau_q = \gamma^{-1} = 100ns$ است.