بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه ۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

تولید درهم‌تنیدگی بین مدهای اپتیکی در کاواک‌های اپتومکانیکی

آزاده زارع، فردین خیراندیش و نجمه اتحادی ابری

گروه فیزیک، دانشکده علوم دانشگاه اصفهان، خیابان هزار جریب، اصفهان

چکیده - با قراردادن یک غشای معلق درون یک کاواک، کاواک رابه دوزیرکاواک تقسیم‌بندی می‌کنیم، چنان‌که این غشای معلق برای هرکدام از زیرکاواک‌ها نقش آینه متحرک راایفا می‌کند. نشان خواهیم داد که مدهای خروجی (نورهای منعکس شده از غشا)هرکدام از زیرکاواک‌ها باهم درهم‌تنیده می‌شوند و این درهم‌تنیدگی را با استفاده از ماتریس همبستگی حالت پایای سیستم بررسی خواهیم کرد. همچنین تاثیر فاکتور کیفیت روی این درهم‌تنیدگی را بررسی می‌کنیم..

کلید واژه- درهم‌تنیدگی، کاواک اپتومکانیکی، ماتریس همبستگی

The entanglement production between optical modes in optomechanical cavities

Azadeh Zare, Fardin Kheirandish and Najmeh Ettehadi Abari

Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan

Abstract- In this paper we put a suspended membrane inside a cavity, in such a way that this membrane play the role of a moveable mirror for each subcavity. We demonstrate that, the output modes of two subcavities are entangled and we analyze this entanglement by the steady-state covariance matrix of the system. We also study the effect of quality factor on this entanglement.

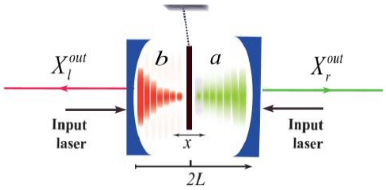
Keywords: covariance matrix,entanglement, optomechanical cavity

۱- مقدمه

سامانه‌های اپتومکانیکی به خاطرکاربردهای متعدد در تکنولوژی موردتوجه قرارگرفتها ند، همچنین می‌توان از آن‌ها برای درک بهتر گذاراز رژیم کلاسیکی به کوانتومی استفاده کرد. درهم‌تنیدگی یکی ازپدیده‌های مهم مکانیک کوانتومی است که مانند پلی بین جهان کلاسیک وکوانتوم عمل می‌کند. سامانه‌های اپتومکانیکی تحت شرایطی مشاهده‌ی این پدیده را برای ما ممکن می‌سازند. معمولا از ساده‌ترین سامانه اپتومکانیکی، یعنی یک کاواک اپتیکی که یکی از آینه‌هایش متحرک است، استفاده می‌کنیم. در این پژوهش ابتدا به معرفی سامانه و آن می‌پردازیم و سپس درهم‌تنیدگی مدهای خروجی را بررسی می‌کنیم.

۲- توصیف سیستم

سیستمی مانند شکل یک را در نظر می‌گیریم. یک غشای متحرک با جرم **m** و سطح کاملا بازتابی در وسط کاواکی که از دو آینه ثابت تشکیل شده‌است قرار می‌دهیم. دو آینهٔ ثابت کاواک از هم به اندازهٔ **2L** فاصله دارند. دو لیزر رانشی با دامنه‌های ϵ_l و ϵ_r و فرکانس‌های ω_{0l} و ω_{0r} به ترتیب به زیرکاواک‌های چپ و راست می‌تابند.



شکل ۱: یک کاواک اپتومکانیکی به عنوان یک منبع درهم تنیدگی

زیرکاواک‌های چپ و راست به طور خطی با جابه‌جایی غشای متحرک و به ترتیب با ضرایب جفت شدگی G_{0l} و G_{0r} جفت می‌شوند. بنابراین معادله هامیلتونی سیستم این‌گونه نوشته می‌شود:

$$H = \hbar\omega_r a^\dagger a + \hbar\omega_l b^\dagger b + \frac{\hbar\Omega_m}{2}(p^2 + q^2) - \hbar(G_{0r}a^\dagger a + G_{0l}b^\dagger b) + i\hbar\epsilon_r(a^\dagger e^{-i\omega_{0r}t} - a e^{i\omega_{0r}t}) + i\hbar\epsilon_l(b^\dagger e^{-i\omega_{0l}t} - b e^{i\omega_{0l}t}) \qquad (۱)$$

در این معادله $a(b)$ عملگر نابودی برای میدان زیرکاواک راست (چپ) می‌باشد و ω_r و ω_l فرکانس‌های این دو زیرکاواک می‌باشند. q و p ($[q\,,p] = i$) عملگرهای بدون بعد مکان و تکانهٔ غشا با فرکانس Ω_m هستند. ضرایب جفت شدگی اپتومکانیکی را نیز این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$G_{0i} = \omega_i / L\sqrt{\hbar/m\Omega_m} \qquad (i = r, l) \qquad (۲)$$

$$\epsilon_i = \sqrt{2P_i\kappa_i/\hbar\omega_{0i}} \qquad (i = r, l) \qquad (۳)$$

P_i توان لیزرهای تابشی به هر کدام از زیرکاواک ها و κ_i آهنگ اتلاف مربوط به هرکدام از زیرکاواک‌ها از طریق آینه‌های انتهایی است. در یک مرجع چرخان که با فرکانس‌های ω_{0r} و ω_{0l} لیزرهای رانشی می‌چرخد، با اضافه کردن نوفه‌ها و جملات اتلافی مربوط به هر متغیر می‌توانیم معادلات لانژون هایزنبرگ را به دست بیاوریم

$$\dot{q} = \Omega_m p \qquad (۴)$$

$$\dot{p} = -\Omega_m q - \gamma_m p + G_{0r}a^\dagger a + G_{0l}b^\dagger b + \xi \qquad (۵)$$

$$\dot{a} = -(\kappa_r + i\Delta_{0r})a + iG_{0r}qa + \epsilon_r + \sqrt{2\kappa_r}a_{in} \qquad (۶)$$

$$\dot{b} = -(\kappa_l + i\Delta_{0l})b + iG_{0l}qb + \epsilon_l + \sqrt{2\kappa_l}b_{in} \qquad (۷)$$

در این فرمول$\xi(t)$ نوفه براونی است که روی حرکت مکانیکی اثر می‌کند و دارای تابع همبستگی زیر است.[۱]

$$\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \frac{\gamma_m}{\Omega_m}\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega(t-t')}\omega\left[coth\left(\frac{\hbar\omega}{2\kappa_B T}\right) + 1\right] \qquad (۸)$$

κ_B ثابت بولتزمن و T دمای اتلافگر غشا است. در رژیم با فاکتور کیفیت بالا یعنی $Q = \Omega_m/\gamma_m \to \infty$ عملگر نوفه مکانیکی را می‌توان به صورت عملگر نوفه سفید گرمایی یعنی $\langle\xi(t)\xi(t') + \xi(t')\xi(t)\rangle/2 \simeq \gamma_m(2\bar{n} + 1)\delta(t - t')$ که $\bar{n} = [exp(\hbar\Omega_m/\kappa_B T) - 1]^{-1}$ تعداد میانگین برانگیختگی‌های گرمایی غشای متحرک است نوشت. نوفه‌های ورودی هرکدام از زیرکاواک‌ها یعنی $a_{in}(t)$ و $b_{in}(t)$ نیز از توابع همبستگی نوفه سفید پیروی می‌کنند:

$$\begin{cases}\langle a_{in}(t)a_{in}^\dagger(t')\rangle = \delta(t - t') \\ \langle a_{in}^\dagger(t)a_{in}(t')\rangle = 0\end{cases} \qquad (۹)$$

$$\begin{cases}\langle b_{in}(t)b_{in}^\dagger(t')\rangle = \delta(t - t') \\ \langle b_{in}^\dagger(t)b_{in}(t')\rangle = 0\end{cases} \qquad (۱۰)$$

دراین معادله‌ها فرض کرده‌ایم که تعداد میانگین فوتون-های گرمایی مدهای میدان‌ها تقریبا صفر هستند یعنی:

$$N(\omega_i) = [exp(\hbar\omega_i/\kappa_B T) - 1]^{-1} \approx 0 \qquad (۱۱)$$

ما در محدوده فرکانس‌های اپتیکی کار می‌کنیم و داریم:

$$\hbar\omega_i/\kappa_B T \gg 1 \qquad (۱۲)$$

معادلات لانژون هایزنبرگ در معادله (۴) تا (۷) مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی غیرخطی جفت شده را توصیف می‌کنندکه می‌توان آن‌ها را حول مقادیر پایای متغیرها خطی کرد$(q = \delta q + q_s\ , p = \delta p + p_s\ , a = \delta a +$ $\alpha\ , b = \delta b + \beta)$.مقادیر پایا را با میانگین‌گیری از معادلات (۴) تا (۷) و برابر با صفر قرار دادن مشتقات زمانی آن‌ها به دست می‌آوریم. بنابراین داریم:

$$p_s = 0 \quad , \quad q_s = \frac{G_{0r}|\alpha|^2 + G_{0l}|\beta|^2}{\Omega_m} \qquad (۱۳)$$

$$\alpha = \frac{\epsilon_r}{\kappa_r + i\Delta_r} \quad , \quad \beta = \frac{\epsilon_l}{\kappa_l + i\Delta_l} \qquad (۱۴)$$

در این معادلات $\Delta_r = \Delta_{0r} - G_{0r}q_s$ و $\Delta_l = \Delta_{0l} - G_{0l}q_s$ به ترتیب توصیف کننده وادنیدگی موثر زیرکاواک‌های راست و چپ هستند.معادلات خطی شده این‌گونه‌اند:

$$\delta\dot{q} = \Omega_m \delta p \qquad (۱۵)$$

$$\delta\dot{p} = -\Omega_m \delta q - \gamma_m \delta p + G_{0r}\alpha(\delta a^\dagger + \delta a) + G_{0l}\beta(\delta b^\dagger + \delta b) + \xi \qquad (۱۶)$$

$$\delta\dot{a} = -(\kappa_r + i\Delta_r)\delta a + iG_{0r}\alpha\delta q + \sqrt{2\kappa_r}a_{in} \qquad (۱۷)$$

$$\delta\dot{b} = -(\kappa_l + i\Delta_l)\delta b + iG_{0l}\beta\delta q + \sqrt{2\kappa_l}b_{in} \qquad (۱۸)$$

می‌توانیم فازهای لیزرهای رانشی را جوری انتخاب کنیم که مقادیرα وβ حقیقی باشند.

۳- ماتریس هموردای پایای مدهای خروجی

درهم‌تنیدگی را می‌توان با استفاده از ماتریس هموردای حالت‌پایای سیستم بررسی کرد. برای این منظور معادلات (۱۵) تا (۱۸) را برحسب مولفه‌های کوادراتوری میدان‌های زیرکاواک‌ها یعنی $\delta X_r = (\delta a + \delta b^\dagger)/\sqrt{2}$ و $\delta Y_r = (\delta a - \delta a^\dagger)/i\sqrt{2}$ و $\delta X_l = (\delta b + \delta b^\dagger)/\sqrt{2}$ و $\delta Y_l = (\delta b - \delta b^\dagger)/i\sqrt{2}$ و عملگرهای نوفه مربوط به آنها یعنی $X_r^{in} = (\delta a + \delta a^\dagger)/\sqrt{2}$ و $\delta Y_r^{in} = (\delta a_{in} - \delta a_{in}^\dagger)/i\sqrt{2}$ و $X_l^{in} = (\delta b_{in} + \delta b_{in}^\dagger)/\sqrt{2}$ و $\delta Y_l^{in} = (\delta b_{in} - \delta b_{in}^\dagger)/i\sqrt{2}$ می‌نویسیم [۱]:

$$\delta\dot{q} = \Omega_m \delta p \qquad (۱۹)$$

$$\delta\dot{p} = -\Omega_m \delta q - \gamma_m p + G_r \delta X_r + G_l \delta X_l + \xi \qquad (۲۰)$$

$$\delta\dot{X}_r = -\kappa_r \delta X_r + \dot{\Delta}_r \delta Y_r + \sqrt{2\kappa_r}X_r^{in} \qquad (۲۱)$$

$$\delta\dot{Y}_r = -\kappa_r \delta Y_r - \Delta_r \delta X_r + G_r \delta q + \sqrt{2\kappa_r}Y_r^{in} \qquad (۲۲)$$

$$\delta\dot{X}_l = -\kappa_l \delta X_l + \Delta_l \delta Y_l + \sqrt{2\kappa_l}X_l^{in} \qquad (۲۳)$$

$$\delta\dot{Y}_l = -\kappa_l \delta Y_l - \Delta_l \delta X_l + G_l \delta q + \sqrt{2\kappa_l}Y_l^{in} \qquad (۲۴)$$

که ضرایب جفت شدگی اپتومکانیکی موثر را این‌گونه تعریف می‌کنیم: $G_i = \frac{2\omega_i}{L}\sqrt{\frac{P_i\kappa_i}{m\Omega_m\omega_{0i}(\kappa_i^2 + \Delta_i^2)}}\ (i = r, l)$ معادلات (۲۱) تا (۲۴) را می‌توان در شکل فشرده‌تری نوشت [۱]. یعنی: $\dot{u}(t) = Au(t) + n(t)$ و $u^T(t) = [\delta q(t), \delta p(t), \delta X_l(t), \delta Y_l(t), \delta X_r(t), \delta Y_r(t)]^T$ و $n(t) = \left[0, \xi(t), \sqrt{2\kappa_l}X_l^{in}, \sqrt{2\kappa_l}Y_l^{in}, \sqrt{2\kappa_r}X_r^{in}, \sqrt{2\kappa_r}Y_r^{in}\right]^T$ و با تعریف ماتریس A وافتوخیزهای کوادراتوری خروجی به صورت زیر:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega_m & -\gamma_m & G_l & 0 & G_r & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_l & \Delta_l & 0 & 0 \\ G_l & 0 & -\Delta_r & -\kappa_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_r & \Delta_r \\ G_r & 0 & 0 & 0 & -\Delta_r & -\kappa_r \end{pmatrix} \qquad (۲۵)$$

$$u_i^{out}(t) = [\delta q(t), \delta p(t), \delta X_l^{out}(t), \delta Y_l^{out}(t), \delta X_r^{out}(t), \delta Y_r^{out}(t)]^T \qquad (۲۶)$$

و ماتریس هموردای‌مربوطه و عملگرنابودی مدهای خروجی [۱]:

$$V_{ij}^{out}(t) = lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\langle u_i^{out}(t)u_j^{out}(t) + u_j^{out}(t)u_i^{out}(t)\rangle \qquad (۲۷)$$

$$a_r^{out}(t) = \int_{-\infty}^{t} ds g_r(t-s)a^{out}(s) \qquad (۲۸)$$

$$b_l^{out}(t) = \int_{-\infty}^{t} ds g_l(t-s)b^{out}(s) \qquad (۲۹)$$

که در این معادلات از روابط ورودی-خروجی[۷]، استفاده کرده‌ایم.$C^{out}(t) = \sqrt{2\kappa_c}\delta C(t) - C^{in}(t), (C =$ و aیا$b)$ $g_i(t)(i = r, l)$ تابع فیلتر است که مدهای خروجی را مشخص می‌کند [۱،۲،۳]

$$g_i(t) = \sqrt{\frac{2}{\tau_j}}\theta(t)e^{-\left(\frac{1}{\tau_j} + i\Omega_j\right)t} \quad ; (j = r, l) \qquad (۳۰)$$

توابع فیلتر باپهناهای باند $\frac{1}{\tau_j}$ وفرکانس‌های مرکزی Ω_j مشخص می‌شوند.با استفاده از معادلات (۲۷) و (۲۸) واستفاده از تبدیلات فوریه عبارت زیر را برای ماتریس همورداي خروجی حالت پایا به دست می‌آوریم:

$$V^{out} = \int d\omega \Upsilon(\omega)(\widetilde{M}^{ext}(\omega) + P_{out}\} \times D_{ext}\{\widetilde{M}^{ext}(\omega)^{\dagger} + P_{out}\}\Upsilon^{\dagger}(\omega) \quad (۳۱)$$

$\Upsilon(\omega)$، تبدیل فوریه ای عبارت زیراست:

$$\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} \delta(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_l & -I_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l & R_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & -I_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_r & R_r \end{pmatrix} \quad (۳۲)$$

$$M^{ext}(\omega) = (i\omega + A)^{-1} \quad (۳۳)$$

$$P_{out} = Diag\left[0, 0, \frac{1}{2\kappa_l}, \frac{1}{2\kappa_l}, \frac{1}{2\kappa_r}, \frac{1}{2\kappa_r}\right] \quad (۳۴)$$

$$D^{ext} = Diag[0, \gamma_m(2\bar{n}_b + 1), 2\kappa_l, 2\kappa_l, 2\kappa_r, 2\kappa_r] \quad (۳۵)$$

دراین معادلات D^{ext} راماتریس پراکندگی می‌نامیم، که به دلیل حضور جملات نوفه درمعادلات لانژون به وجود می‌آید.همچنین داریم:

$$R_j = \sqrt{2\kappa_j} Re[g_j(t)], \quad I_j = \sqrt{2\kappa_j} Im[g_j(t)] \quad (۳۶)$$

$(j = r, l)$. برای بررسی درهم‌تنیدگی بین مدهای خروجی زیرکاواک‌ها از نگاتیویته لگاریتمی E_N که به صورت زیرتعریف می‌شود استفاده می‌کنیم [۴]:

$$E_N = max[0, -ln(2\zeta)] \quad (۳۷)$$

$$\zeta \equiv 2^{-\frac{1}{2}}\{\Lambda(V') - \sqrt{\Lambda(V')^2 - 4detV}\}^{\frac{1}{2}} \quad (۳۸)$$

$$\Lambda(V') \equiv detB + detD - 2detC \quad (۳۹)$$

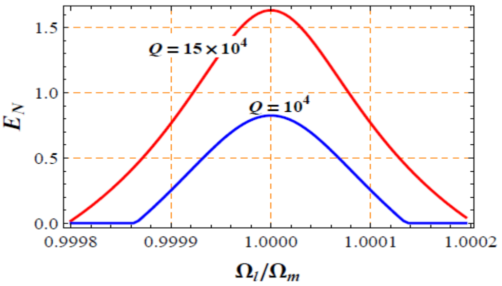
$$V' = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix} \quad (۴۰)$$

$$B = \begin{pmatrix} V_{33}^{out} & V_{34}^{out} \\ V_{34}^{out} & V_{44}^{out} \end{pmatrix} \quad (۴۱)$$

$$D = \begin{pmatrix} V_{55}^{out} & V_{56}^{out} \\ V_{56}^{out} & V_{66}^{out} \end{pmatrix} \quad (۴۲)$$

$$C = \begin{pmatrix} V_{35}^{out} & V_{36}^{out} \\ V_{45}^{out} & V_{46}^{out} \end{pmatrix} \quad (۴۳)$$

قابل ذکراست که $E_N = 0$ به این معنی است که هیچ درهم‌تنیدگی بین مدهای خروجی دو زیرکاواک وجود ندارد. بااستفاده از این روابط نگاتیویته لگاریتمی رابرحسب فرکانس مد خروجی کاواک $\frac{\Omega_l}{\Omega_m}$ و برای دو مقدارمتفاوت فاکتورغشا $(Q = 10^4, Q = 15 \times 10^4)$رسم کردیم.



شکل ۲: نگاتیویته لگاریتمی E_N بین مدهای خروجی زیرکاواک‌ها بر حسب فرکانس نرمال شده‌ی $\frac{\Omega_l}{\Omega_m}$ برای دومقدار متفاوت فاکتور کیفیت غشا، در دمای ثابت $T = 1\,K$ و$\Omega_r = -\Omega_m$. وادیدگی زیرکاواک‌ها در مقدارهای $\Delta_r = -\Omega_m$,$\Delta_l = \Omega_m$ ثابت شده‌اند. پارامترهای دیگرنیز این مقادیرراداراند: $\frac{\Omega_m}{2\pi} = 10\,MHz$ ، $\kappa_r = 0.4\Omega_m$، $P_r = 10\,mW$، $L = 1\,mm$، $\kappa_l = 0.1\Omega_m$، $P_l = 48\,mW$، $m = 10\,ng$.

شرایطی که در شکل(۲) توضیح داده شده است را در نظر می‌گیریم [۵،۶]، m جرم غشا و $T = 1\,K$ دمای آن است.

۴- نتیجه گیری

نشان دادیم که مدهای خروجی دو زیرکاواک با هم درهم-تنیده‌اند و این درهم‌تنیدگی در $\Omega_r = \Omega_l$ مقدار بیشینه خود را دارد. همچنین با افزایش فاکتور کیفیت غشا می‌توان این درهم‌تنیدگی را افزایش داد.

مراجع

[1] Genes, Claudiu, et al., *Robust entanglement of a micromechanical resonator with output optical fields*, **Physical Review A 78**, 032316, 2008.

[2] Enk, S. J. van, Fuchs, Christopher A., *Quantum state of an ideal propagating laser field*, **Physical Review Letters 88**, 027902, 2001.

[3] Vitali, David, et al., *Time-separated entangled light pulses from a single-atom emitter*, **New Journal of Physics 10**, 033025, 2008.

[4] Vidal, Guifre and Werner, Reinhard F., *Computable measure of entanglement*, **Physical Review A 65**, 032314, 2002.

[5] Teufel, John D. et al., *Circuit cavity electromechanics in the strong- coupling regime*, **Nature 471**, 204, 2011.

[6] Thompson, Jeffery D., et al., *strong dispersive coupling of a high- finesse cavity to a micromechanical membrane*, **Nature 452**, 72, 2008.

[7] Zoller, Peter and Gardiner, Crispin, *Quantum Noise*, Springer, Berlin, 2000.

[8] Fabre, Claude, et al., *Quantum-noise reduction using a cavity with a movable mirror*, **Physical Review A 49**,1337, 1994.