بیست و هفتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و سیزدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه سیستان و بلوچستان،
زاهدان، ایران.
۱۴-۱۶ بهمن ۱۳۹۹

کد مقاله : ۱-۲۴۵۸-۱۰-A

# توصیف یک سامانه‌ی اپتیک غیرخطی بر اساس رهیافت حالت‌های همدوس غیرخطی

**مژگان مومنی دمنه، علی مهدی‌فر، رسول رکنی زاده**

**گروه فیزیک-دانشکده فیزیک-دانشگاه اصفهان**

**چکیده - در این مقاله یکی از فرآیندهای مربوط به اپتیک غیرخطی را با استفاده از رهیافت حالت‌های همدوس غیرخطی توصیف می‌کنیم. این فرآیند غیرخطی که سبب غیرخطیت $\chi^{(3)}$ می‌گردد، وابستگی ضریب شکست ماده به شدت نور فرودی است. نشان می‌دهیم که سامانه‌ی اپتیک غیرخطی مزبور را می‌توان با جبر یک نوسانگر دو بعدی تغییر شکل یافته توصیف کرد. سرانجام، ضمن تعریف حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با سامانه‌ی اپتیک غیرخطی، خواص غیرکلاسیکی آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.**

کلید واژه- حالت همدوس غیرخطی، جبرنوسانگرتغییر شکل یافته، سامانه‌ی اپتیک غیرخطی.

# Description of one of the nonlinear optical system based on the approach nonlinear coherent states

**MojganMomeni-Demneh, Ali Mahdifar andRasoulRoknizadeh**

**Physicsgroup, Physics department, University of Isfahan**

**Abstract- In this paper, we describe one of thenonlinear optical phenomena based on thenonlinear coherent states approach. This phenomena which arise out of a $\chi^{(3)}$ nonlinearity,is the intensity dependent of the refractive index.We have shown that the deformed two-dimensional oscillator algebra can be used to describe this nonlinear optical system. Finally, we obtain thenonlinear coherent states for this nonlinear optical system and study their quantum statistical properties.**

Keywords:Deformed oscillator algebra,Nonlinear coherent state, Nonlinear optical system.



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترس باشد.

## ۱-مقدمه

حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ و تعمیم‌های آن دارای نقش بسیار مهمی در بسیاری از شاخه‌های فیزیک هستند. یکی از این تعمیم‌ها حالت‌های همدوس غیرخطی بوده که به صورت ویژه حالت عملگر نابودی جبر نوسانگر تغییر شکل یافته تعریف می‌شود [۱]. این حالت‌ها را که از خود خواص غیر کلاسیکی از جمله چلاندگی نشان می‌دهند، می‌توان در طرحواره‌های مختلفی از جمله حرکت مرکز جرم یون به دام افتاده [۲] تحقق بخشید.

در سال‌های اخیر توصیف سامانه‌های مختلف فیزیکی بر اساس رهیافت حالت‌های همدوس و حالت‌های تعمیم یافته‌ی آن (از جمله حالت‌های همدوس غیرخطی)، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. به عنوان نمونه می‌توان به مطالعاتی مانند اثر خمیدگی فضای فیزیکی بر پدیده‌های مشاهده پذیر با استفاده از رهیافت حالت‌های همدوس غیرخطی [۳] اشاره کرد. علاوه بر این، حالت‌های همدوس غیرخطی توانسته‌اند جنبه‌های غیرخطی بعضی از پدیده‌های کوانتومی همچون اثر اپتیکی کر [۴] را توصیف نمایند.

هدف ما در این مقاله توصیف برخی از پدیده‌های اپتیک غیرخطی با استفاده از رهیافت حالت‌های همدوس غیرخطی است. بدین منظور، با پیدا کردن تابع تغییر شکل،ارتباط بین جبر نوسانگر تغییر شکل یافته و یکی از پدیده‌های اپتیک غیرخطی را پیدا کرده و در ادامه حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با این جبر را ساخته و خواص غیرکلاسیکی آن‌ها را بررسی خواهیم کرد.

## ۲- حالت‌های همدوس غیرخطی

جبر ویل-هایزنبرگ تغییر شکل یافته از عملگرهای تغییر شکل یافته‌ی

$$\hat{A}=\hat{a}f(\hat{n}),\quad \hat{A}^{\dagger}=f^{\dagger}(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}, \qquad (۱)$$

بدست می‌آید که در رابطه‌ی جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند:

$$[\hat{A},\hat{A}^{\dagger}]=(\hat{n}+1)f^{2}(\hat{n}+1)-\hat{n}f^{2}(\hat{n}), \qquad (۲)$$

در این روابط، تابع غیرخطی $f(\hat{n})$ یک تابع عملگر مقدار بوده که به عملگر عددی $\hat{n}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ وابسته است.

## ۳- حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با سامانه‌ی غیرخطی

اپتیک غیرخطی، شاخه‌ای از اپتیک است که در آن رفتار نور در یک ماده غیرخطی بررسی می‌شود. به طور معمول، این غیرخطیت در شدت‌های نور بسیار بالا مشاهده می‌شود. یکی از مهم‌ترین فرآیندهای غیرخطی که سبب غیرخطیت $\chi^{(3)}$ می‌گردد، وابستگی ضریب شکست ماده به شدت نور فرودی است. در این‌گونه مواد غیرخطی، ضریب شکست دارای یک جمله‌ی ثابت به علاوه یک جمله‌ی متناسب با شدت نور فرودی است. سامانه‌ی غیرخطی مزبور در برهمکنش با یک میدان کوانتومی دومدی با هامیلتونی کوانتومی زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{H}=\hbar\omega_1\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hbar\omega_2\hat{b}^{\dagger}\hat{b}+\frac{\hbar\kappa}{2}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}, \qquad (۳)$$

که در آن $\hat{a}$ $(\hat{a}^{\dagger})$ و $\hat{b}$ $(\hat{b}^{\dagger})$ عملگرهای نابودی (خلق) مدهای اول و دوم میدان فرودی هستند و $\kappa$ با ضریب غیر خطی مرتبه‌ی سوم $\chi^{(3)}$ متناسب است[۵]. ویژه مقادیر سامانه‌ی غیرخطی توصیف شونده با هامیلتونی (۳) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E_n=\hbar\omega_1 n_a+\hbar\omega_2 n_b+\frac{\hbar\kappa}{2}n_a n_b. \qquad (۴)$$

برای بدست آوردن تابع تغییر شکل یافته‌ی متناظر با این سامانه‌ی دومدی و غیرخطی، ویژه مقادیر سامانه‌ی مزبور را با ویژه مقادیر یک نوسانگر هماهنگ دوبعدی تغییر شکل یافته که هامیلتونی آن به صورت زیر باشد:

$$\hat{H}=\hbar\omega_1\hat{A}^{\dagger}\hat{A}+\hbar\omega_2\hat{b}^{\dagger}\hat{b}, \qquad (۵)$$

مقایسه می‌کنیم. همانگونه که مشخص است هامیلتونی نوسانگر دوبعدی تغییر شکل یافته‌ی بالا تعمیمی از هامیلتونی یک نوسانگر دوبعدی با بسامدهای $\omega_1$ و $\omega_2$ بوده که تنها یکی از ابعاد آن را به صورت تغییر شکل یافته تغییر داده‌ایم. عملگر نابودی تغییر شکل یافته $\hat{A}$ را نیز به صورت $\hat{A}=\hat{a}\hat{f}(\hat{n}_a,\hat{n}_b)$ در نظر می‌گیریم. ویژه مقادیر این نوسانگر تغییر شکل یافته نیز با رابطه‌ی:

$$E_n=\hbar\omega_1 f^{2}(n_a,n_b)n_a+\hbar\omega_2 n_b, \qquad (۶)$$

داده می‌شود. اکنون با مقایسه‌ی روابط (۴) و (۶) تابع


این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترس باشد.

تغییر شکل یافته‌ی متناظر با سامانه‌ی اپتیک غیرخطی موردنظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{f}(\kappa,\hat{n}_b)=\left(1+\frac{\kappa}{2\omega_1}\hat{n}_b\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (۷)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود این تابع،با ضریب غیر خطی $\kappa$، بسامد مد اول $\omega_1$ و تعداد فوتون‌های مد دوم $\hat{n}_b$ متناسب است و می‌توان با کنترل این ضرایب خواص غیرکلاسیکی سامانه را کنترل کرد.

تاکنون توانستیم سامانه اپتیک غیرخطی مورد نظرمان را با یک جبر نوسانگر دوبعدی تغییر شکل یافته توصیف کنیم. در ادامه، نشان می‌دهیم که سامانه مورد نظر را می‌توان با استفاده از مدل شوینگر تعمیم یافته به صورت یک جبر $su(2)$ی تغییر شکل یافته نیز توصیف نمود. مولدهای جبر $su(2)$ در رابطه‌ی جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند:

$$\left[\hat{J}_0,\hat{J}_\pm\right]=\pm\hat{J}_\pm,\ \left[\hat{J}_+,\hat{J}_-\right]=2\hat{J}_0. \quad (۸)$$

با استفاده از تعریف‌های زیر:

(۹)

$$\hat{J}_+=\hat{a}^\dagger\hat{b},\ \hat{J}_-=\hat{a}\hat{b}^\dagger,\ \hat{J}_0=\frac{1}{2}(\hat{n}_a-\hat{n}_b),$$

شوینگر نشان داد که می‌توان جبر $su(2)$ را با استفاده از عملگرهای یک نوسانگر دوبعدی تحقق بخشید[۶].

اکنون ما نیز با تعریف عملگرهای شوینگری تغییر شکل یافته‌ی زیر

$$\hat{J}_+^{(\kappa)}=\hat{A}^\dagger\hat{b}=\hat{f}(\kappa,\hat{n}_b)\hat{a}^\dagger\hat{b},$$
$$\hat{J}_-^{(\kappa)}=\hat{b}^\dagger\hat{A}=\hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{f}(\kappa,\hat{n}_b), \quad (۱۰)$$
$$\hat{J}_0^{(\kappa)}=\frac{1}{2}\left(\hat{n}_a-\hat{n}_b\right),$$

به جبر تغییر شکل یافته‌ی $su_\kappa(2)$ زیر برای توصیف سامانه اپتیک غیرخطی می‌رسیم:

$$\left[\hat{J}_0^{(\kappa)},\hat{J}_\pm^{(\kappa)}\right]=\pm\hat{J}_\pm^{(\kappa)},$$
$$\left[\hat{J}_+^{(\kappa)},\hat{J}_-^{(\kappa)}\right]=h(\hat{J}_0^{(\kappa)},\kappa), \quad (۱۱)$$

که $h(\hat{J}_0^{(\kappa)},\kappa)$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

(۱۲)

$$h(\hat{J}_0^{(\kappa)},\kappa)=2\hat{f}^2(\kappa,\hat{n}_b)\hat{J}_0^{(\kappa)}+\kappa\left(\frac{1}{2\omega_a}\hat{f}(\kappa,\hat{n}_b)-\frac{\kappa}{16\omega_a^2}\right)n_b\left(1+n_a\right).$$

آشکار است که در حد $\kappa\to 0$، جبر $su_\kappa(2)$ی بالا به جبر استاندارد تبدیل می‌شود. همانگونه که از روابط (۱۰) مشاهده می‌شود، داریم:

$$\hat{J}_-^{(\kappa)}\left|0,N\right\rangle=\hat{b}^\dagger\hat{a}\sqrt{1+\frac{\kappa}{2\omega_1}\hat{n}_b}\left|0,N\right\rangle=0,$$
$$\hat{J}_+^{(\kappa)}\left|N,0\right\rangle=\sqrt{1+\frac{\kappa}{2\omega_1}\hat{n}_b}\hat{a}^\dagger\hat{b}\left|N,0\right\rangle=0. \quad (۱۳)$$

رابطه اول نشان می‌دهد که $\left|0,N\right\rangle\equiv\left|0\right\rangle_a\otimes\left|N\right\rangle_b$ حالت خلأ جبر $su(2)$ تغییر شکل یافته است. از رابطه دوم نیز مشخص است که به ازای یک $N$ مشخص، با یک فضای هیلبرت متناهی الابعاد سرو کار داریم. اکنون می‌توانیم حالت‌های همدوس دومدی متناظر با سامانه‌ی اپتیک غیرخطی را با استفاده از حالت‌های همدوس متناهی الابعاد[۷]به دست آوریم:

$$\left|\mu\right\rangle_\kappa=C^{-1}\exp(\mu\hat{J}_+^{(\kappa)})\left|0,N\right\rangle$$
$$=C^{-1}\exp(\mu\sqrt{1+\frac{\kappa}{2\omega_1}\hat{n}_b}\hat{a}^\dagger\hat{b})\left|0,N\right\rangle \quad (۱۴)$$
$$=C^{-1}\sum_{n=0}^{N}\sqrt{\binom{N}{n}}f(\kappa,n_b)!\mu^n\left|n,N-n\right\rangle,$$

که در آن ضریب بهنجارش با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$C^2=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left[f(\kappa,n_n)!\right]^2\left(\left|\mu\right|^2\right)^n. \quad (۱۵)$$

آشکار است که حالت‌های همدوس $\left|\mu\right\rangle_\kappa$ را می‌توان به عنوان خانواده‌ای از حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با سامانه‌ی اپتیک غیرخطی به شمار آورد. به سادگی مشاهده می‌شود که برای $\kappa\to 0$ (غیر خطیت به سمت صفر)، تابع تغییر شکل یافته به سمت 1 میل می‌کند $(f(\kappa,n_b)\to 1)$ و حالت همدوس غیرخطی به حالت همدوس دومدی استاندارد[۸] تبدیل می‌شود. شایان ذکر است که اثبات رابطه تفکیک واحد برای حالت‌های همدوس بدست آمده نیز به سادگی از رهیافت مورد استفاده در مرجع [۳] بدست می‌آید.


این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترس باشد.

## ۴- خواص کوانتوم اپتیکی حالت‌های همدوس $|\mu\rangle_\kappa$

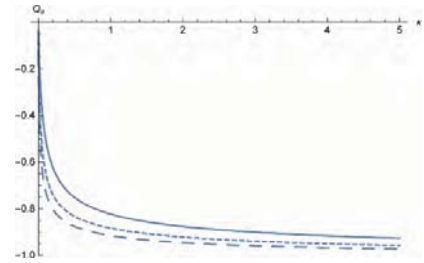
در این بخش، بدلیل محدودیت در تعداد صفحات مقاله، برای بررسی خواص آمار کوانتومی تنها پارامتر مندل را برای حالت‌های همدوس غیر خطی متناظر با سامانه‌ی اپتیک غیرخطی بررسی خواهیم کرد.

برای مطالعه‌ی آمار فوتون‌های حالت‌های همدوس غیرخطی مورد نظر پارامتر مندل [۹] یعنی

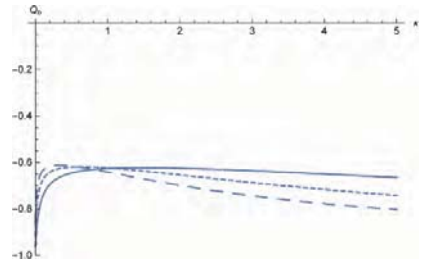
$$Q_i = \frac{(\Delta n_i)^2 - \langle \hat{n}_i \rangle}{\langle \hat{n}_i \rangle}, \quad i = a,b \tag{۱۷}$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مقادیر مثبت، منفی و صفر پارامتر مزبور به ترتیب نشانگر آمار فراپواسونی، آمار زیر پواسونی و آمار پواسونی است.

در شکل‌های (۱) و (۲) پارامتر مندل برای مدهای $a$ و $b$ با $N=10$ و $\mu = 0.2, 0.3, 0.4$ برحسب $\kappa$ رسم شده است. همانطور که نشان داده شده است هر دو مد دارای آمار زیر پواسونی هستند، علاوه بر این برای مد $a$ با افزایش $\kappa$، سرشت زیر پواسونی آمار شمارش فوتون‌ها تقویت می شود.همچنین برای مد $b$، با وجود کاهش اندک اولیه‌ی سرشت زیر پواسونی، با افزایش بیشتر $\kappa$، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌ها تقویت می‌شود.




شکل ۱: پارامتر مندل مد $a$بر حسب $\kappa$ برای $N$=10 و $\mu$=0.4 (خط چین)، $\mu$=0.3 (نقطه چین) و $\mu$=0.2 (خطوپر)




شکل ۲: پارامتر مندل مد $b$بر حسب $\kappa$ برای $N$=10 و $\mu$=0.4 (خط چین)، $\mu$=0.3 (نقطه چین) و $\mu$=0.2 (خطوپر)

## ۵- نتیجه‌گیری

مهمترین نتایج این پژوهش عبارتند از:

توانستیم یک سامانه غیرخطی متناسب با $\chi^{(3)}$ را با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی توصیف کنیم، به گونه‌ای که تابع تغییر شکل در نظریه‌ی حالت‌های همدوس غیرخطی را برای سامانه‌ی مزبور به دست آوردیم. نشان داده شده است که سامانه اپتیک غیرخطی مورد نظر را می‌توان با یک جبر $su(2)$ی تغییر شکل یافته نیز توصیف نمود.

بروز ویژگی‌های غیرکلاسیک حالت‌های همدوس غیرخطی را می‌توان به مولفه‌های غیرخطی سامانه‌ی اپتیکی مربوط دانست. به ویژه این موضوع می‌تواند مسیر مناسبی برای توصیف الگوهای برهمکنش غیرخطی در اپتیک کوانتومی را فراهم آورد.

## ۶- مرجع‌ها

**[1]** W. Vogel and R. L. de Matos Filho, "Nonlinear Coherent States ", Phys. Rev. A. **54**, (1996)4560.

**[2]** V.I. Man'ko, G. Marmo, E.D.G. Sudarshan, F. Zaccaria, "f-Oscillators and nonlinear coherent states", PhysicaScripta, **55** (1997) 528-541.

**[3]** A. Mahdifar, R. Roknizadeh, M.H. Naderi, "Geometric approach to nonlinear coherent states usingthe Higgs model for harmonicoscillator",J. Phys. A: Math.Gen, **39** (2006) 7003-7014.

**[4]** M.H. Naderi, M. Soltanlkotabi, R. Roknizadeh," Dynamical Properties of a Two-Level Atom in Three Variants of the Two-Photon q-Deformed Jaynes–Cummings Model", J. Phys. Soc. Jpn, **73** (2004) 2413-2423.

**[5]** M. Hillery, "An introduction to the quantum theory of nonlinear optics", actaphysicaslovaca, **59** (2009) 1-80.

**[6]** J. Schwinger, *Quantum Theory of Angular Momentum*, eds. L. C. Biedenharn and H. van Dam (Academic Press, New York, 1965).

**[7]** L. M. Kuang, F. B. Wang and Y. G. Zhou, "Dynamics of a harmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert space", Phys. Lett. A **183** (1993) 1.

**[8]** V. Buzek and T. Quang,"Generalized coherent state for bosonic realization of SU(2) Lie algebra",J.Opt. Soc. Amer. B, **6** (1989) 2447.

**[9]** L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.


این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترس باشد.